北京大学数学丛书

微分动力系统导引

张锦炎　钱　敏　著

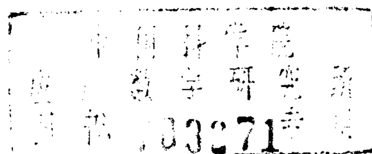


北京大学出版社

北京大学数学丛书

微分动力系统导引

张锦炎　钱　敏　著



北京大学出版社

新登字(京)159号

北京大学数学丛书
微分动力系统导引
张锦炎 钱 敏 著
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
850×1168毫米 32开本 7印张 200千字
1991年4月第一版 1991年4月第一次印刷
印数：00001—3,000册
ISBN 7-301-01682-4/O·267
定价：5.80元

内 容 简 介

动力系统把丰富的物理内容与近代数学的抽象方法有机地结合在一起，是古典力学的数学形式．本书深入浅出地对微分动力系统的基本内容进行了阐述，主要研究微分同胚在其不变集上的运动特性及其结构稳定性．全书共八章，内容包括：结构稳定性与双曲性、Smale 马蹄定理及结构稳定性、Hartman 定理与稳定流形定理、Morse-Smale 向量场的结构稳定性、Markov 分割、公理A的 Ω 稳定性．本书采用的观点和论证方法都尽可能从较为初等的角度来引导读者进入这个领域．因此，本书给准备进入这个数学领域从事研究工作的读者提供了一本比较合适的读物．

本书可作为高等学校数学专业研究生教材，也可供高等学校理工科专业师生及研究工作者参考．

说　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物．丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材．我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量．

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考．

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

序　言

动力系统作为古典力学的数学形式是一门历史悠久的学科．近三十年来，由于它的丰富的物理内容与近代数学提供的抽象方法相结合，出现了群峰竞秀、蓬勃发展的局面．大致说来，它的内容有两个部分，即保守动力系统与微分动力系统．本书以后者为主题，主要研究微分同胚在其不变集上的运动特性及其结构稳定性．

编写本书的目的有二，一是阐述微分动力系统的基本理论；二是为近年来在自然科学界引起了广泛兴趣的紊动（Chaos）现象提供可参考的数学模型．表现在内容的选取上包括谱分解与Ω稳定性，详细介绍 Markov 分割的理论．

考虑到本书的读者除数学专业研究生之外还有其它自然科学研究工作者，因此，在编写本书时我们力图做到以下两点：（1）在数学上论证是严格的，基本自封；（2）深入浅出，使具有一定数学基础的读者可以看懂本书所讨论的主要问题的眉目．

当然这些都只是作者的愿望．由于水平有限，缺点错误一定不少，欢迎读者批评指正．

本书初稿曾在北京大学数学系研究生的动力系统选修课上讲授过．原稿的一些章节以许连超、刘张炬两同志在讨论班上的讲稿为基础，因此本书现在能与读者见面是与他们的努力分不开的．

张锦炎　钱　敏

1986 年春于北京大学

目　录

第一章 基础知识

在本章的 §1.1 中我们不加证明地叙述了古典常微分方程定性理论的几个基本定理，这些定理在以后各章中将直接或间接地用到。 §1.2 中我们在古典常微分方程的基础上讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 与 Banach 空间中的线性系统、线性向量场与线性自同构。§1.3 中引进一些微分动力系统中常用的概念，为以后各章作准备。

§1.1 古典常微分方程中的一些结论

考虑系统

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \in M, \tag{1.1}$$

其中M是紧流形，$f: M \to TM$（M 的切丛）是定义在M上的 C^1 向量场。

定理 1.1（解的局部存在唯一性定理） 设M是一个紧流形（或 n 维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$），$U \subset M$，U是开集，$f: U \to TM$ 是 C^1 映射，则对任意 $x_0 \in U$，存在常数 $c > 0$ 与一个唯一的解 $\varphi_t(x_0) \equiv \varphi(t, x_0)$，$\varphi(\cdot, x_0): (-c, c) \to U$，满足微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 与初条件 $\varphi(0, x_0) = x_0$。

定义 称点 $x_0 \in M$ 为系统(1.1)的**平衡点**，如果 x_0 是向量场 $f(x)$ 的奇点，即 $f(x_0) = 0$。平衡点 x_0 称为是**稳定的**，如果对于 x_0 的任一邻域$W \subset U$都存在 x_0 的一个邻域 $W_1 \subset W$，使得从 W_1 中的点出发的解 $\varphi(t, x_1)$，$x_1 \in W_1$，当 $t > 0$ 都有意义，且 $\varphi(t, x_1) \in W$，当 $t \geqslant 0$。进一步，若能取到 W_1 还使得当 $x_1 \in W_1$ 有 $\varphi(t, x_1) \to x_0$（当 $t \to +\infty$），则称 x_0为**渐近稳定的**。

判断平衡点的稳定性有下述 Liapunov 定理：

定理 1.2 设 x_0 是系统(1.1)的平衡点，W 是 x_0 的邻域，$W \subset U$，若存在函数 $V: W \to \boldsymbol{R}$ 在 W 上连续，在 $W - \{x_0\}$ 上可微，满足

(1) $V(x_0) = 0$；$V(x) > 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

(2) $\dot{V}(x) \leqslant 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

则 x_0 是稳定平衡点。若函数 V 还满足

(3) $\dot{V}(x) < 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

则 x_0 是渐近稳定的。

其中 $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ （x_i 是局部坐标）是函数 V 沿系统(1.1)的解曲线的导数。V 称为 Liapunov 函数。

在 $\boldsymbol{R}^n$ 上考虑系统(1.1)时，解存在的最大区间不一定是整个实数轴，但是在紧流形 M 上，有以下定理：

定理 1.3 紧流形 M 上系统(1.1)的解整体存在，即 $\varphi(t, x)$ 对一切 $t \in \boldsymbol{R}$，$x \in M$ 都有意义。

定义 称 $\varphi(t,x)$ 为由向量场 f 导出的**流**。

流在 $\boldsymbol{R} \times M$ 上连续，且具有性质：

对 $\forall t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$，$x \in M$，

(i) $\varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x))$；

(ii) $\varphi(0,x) = x$。

特别，在 $\boldsymbol{R}^n$ 上有以下定理：

定理 1.4 令 $U \subseteq \boldsymbol{R}^n$ 是开集，函数 $f: U \to \boldsymbol{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数为 K。系统(1.1)的解 $\varphi(t, x_0)$在区间 $[0, T]$ 上有定义，则存在 x_0 的邻域 $W \subset U$，使对一切 $x \in W$，$\varphi(t, x)$ 也在区间$[0, T]$上有定义，且当 $t \in [0, T]$ 时，

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |x - x_0| e^{Kt}. \tag{1.2}$$

§ 1.2 线性系统

考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = Lx, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{1.3}$$

其中 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$. $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 表示所有 $\boldsymbol{R}^n$ 到自身的线性算子在通常的算子加法与数乘下所组成的线性空间。在 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 上定义范数如下：

$$\|L\| \equiv \sup_{|x|=1} |Lx|, \tag{1.4}$$

$\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是一个 Banach 空间。

由 Lx 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的向量场，称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的**线性向量场**，也简称 L 是线性向量场。

下面指出(1.3)的解是整体存在的，并且具体写出向量场 L 导出的流。

考虑 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的线性算子序列 $E_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} L^k$，其中

$$L^k = \underbrace{L \circ \cdots \circ L}_{k\text{个}},$$

L^0 定义为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的恒同算子，记作 I 或 id。应用不等式 $\|L^k\| \leqslant \|L\|^k$ 不难证明以下命题：

命题 1.5 算子序列 E_m 收敛于一线性算子，记作 e^L，即

$$e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k.$$

定义 由 $\mathrm{Exp}(L) \equiv e^L$ 所定义的映射 Exp: $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 称为**指数映射**.

命题 1.6 设 α: $\boldsymbol{R} \to \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是由 $\alpha(t) = e^{tL}$ 所定义，则 α 是可微的，且

$$\alpha'(t) = Le^{tL}.$$

推论 $\varphi(t,x) = e^{tL}x$ 是向量场 L 导出的流。

命题 1.7 若 $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，$L_1L_2 = L_2L_1$，则

$$e^{L_1+L_2} = e^{L_1}e^{L_2} = e^{L_2}e^{L_1}. \tag{1.5}$$

推论 e^L 有逆 e^{-L}.

设 $\boldsymbol{C}^n$ 是 n 维复向量空间，$\boldsymbol{C}^n$ 中的元素可以表示为 $u + iv$,

$u, v \in \boldsymbol{R}^n$. 若 $a+\mathrm{i}b \in \boldsymbol{C}$, $u+\mathrm{i}v \in \boldsymbol{C}^n$, 则

$$(a+\mathrm{i}b)(u+\mathrm{i}v)=(au-bv)+\mathrm{i}(av+bu).$$

以 $\mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 表示从 $\boldsymbol{C}^n$ 到自身的复线性算子的集合. 若 $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$, 定义 T 的范数如下:

$$\|T\|=\sup\{|Tz|;\ z \in \boldsymbol{C}^n, |z|=1\},$$

于是 $\mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 是 Banach 空间. 对于算子 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$, 定义它在 $\boldsymbol{C}^n$ 上的扩张算子 $\tilde{L}$: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ 如下:

$$\tilde{L}(u+\mathrm{i}v)=L(u)+\mathrm{i}L(v). \tag{1.6}$$

不难验证 $\tilde{L}$ 是复线性的. 复指数映射的定义与实指数映射相同. 令 $\mathscr{C}$: $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 是由 $\mathscr{C}(L)=\tilde{L}$ 定义的映射, 则显然有以下命题:

命题 1.8 映射 $\mathscr{C}$ 具有下列性质:

(1) $\mathscr{C}$ 是线性映射;

(2) $\mathscr{C}(L_1 \circ L_2)=\mathscr{C}(L_1) \circ \mathscr{C}(L_2)$;

(3) $\mathscr{C}(\mathrm{Exp}L)=\mathrm{Exp}\mathscr{C}(L)$;

(4) $\|\mathscr{C}(L)\|=\|L\|$.

例 1 设 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^2)$, $\{e_1, e_2\}$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一组基. 对于这组基, L 有形式

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

则 $\tilde{L}=\mathscr{C}(L)$ 在 $\boldsymbol{C}^2$ 的基 $\{e_1+\mathrm{i}e_2,\ e_1-\mathrm{i}e_2\}$ 下具有形式

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\lambda=\alpha-\mathrm{i}\beta$. 由上命题 $\widetilde{\mathrm{e}^L}=\mathrm{e}^{\tilde{L}}$, 所以 e^L 对于基 $\{e_1, e_2\}$ 的矩阵是

$$\mathrm{e}^{\alpha}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

设 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$, 称 $\tilde{L}$ 的**谱**(即 $\tilde{L}$ 的特征值的集合)为 L 的**复谱**(即 L 的特征多项式的复根的集合).

大家熟知，复算子 $\tilde{L}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, r,$$

λ_i 是 L 的复特征值.

关于实标准型有下面的定理：

定理 1.9 如果 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，则在 $\boldsymbol{R}^n$ 中存在一组基，使得 L 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_s \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, r, \quad \lambda_i \in \boldsymbol{R};$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & C_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, s,$$

$$C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j, \beta_j \in \boldsymbol{R}.$$

若不考虑排列次序，则 $A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_s$ 是唯一确定的.

推论 令 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基使得 L 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_s \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

其中

$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ \varepsilon & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i=1,\cdots,r;$$

$$B_j=\begin{pmatrix} C_j & & & 0 \\ \varepsilon I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon I & C_j \end{pmatrix}, \quad j=1,\cdots,s.$$

命题 1.10 如果 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，$\lambda$ 是 L 的 m 重复谱，则 e^{λ} 是 e^{L} 的 m 重复谱.

证明 设 $\tilde{L}$ 的标准型为(1.7)，于是

$$\widetilde{e^{L}}=e^{\tilde{L}}=\begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}.$$

所以我们不妨设 $\tilde{L}$ 只有一个特征值 λ，其重数是空间的维数 n，即 $\tilde{L}$ 的标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

令

$$D=\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix},$$

于是 $\tilde{L}=D+N$. 显然 $N^n=0$, $ND=DN$, 由命题 1.7 得知 $e^{\tilde{L}}=e^De^N$. 而

$$e^D=\begin{pmatrix}e^\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^\lambda\end{pmatrix},$$

$$e^N=I+N+\frac{N^2}{2!}+\cdots+\frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $\widetilde{e^{L}}=e^{\tilde{L}}=e^\lambda e^N$. 显然, e^λ 是 $\widetilde{e^L}$ 的 n 重特征值,是 e^L 的 n 重复谱. ∎

定义 线性向量场 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 称为是**双曲的**, 如果 L 的复谱与虚轴不交. 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的, 则 L 的有负实部的特征值的个数称为 L 的**指数**.

显然双曲线性向量场仅有一个奇点——原点.

定理 1.11 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的, 则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的唯一直和分解 $\boldsymbol{R}^n=E^s\oplus E^u$,其中 E^s, E^u 是 L 的不变子空间, $L^s\equiv L|E^s$, $L^u\equiv L|E^u$ 的特征值实部分别小于零、大于零. 分别称 E^s, E^u 为 L 的**稳定子空间**,**不稳定子空间**.

证明 令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基, 使得在这组基之下, L 的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & A_{s'} & & & & & \\ & & & B_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & B_{s''} & & \\ & & & & & & C_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & C_{r'} \\ & & & & & & & & & D_1 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & D_{r''} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i < 0, \ i = 1, \cdots, s';$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_j \end{pmatrix},$$

$$M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j < 0, \ j = 1, \cdots, s'';$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \lambda_k > 0, \ k = 1, \cdots, r';$$

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_l \end{pmatrix},$$

$$M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \quad \alpha_l > 0, \ l = 1, \cdots, r''.$$

令 E^s 是由 $e_1,\cdots,e_{s'}$, $e_{s'+1},\cdots$, $e_{s'+2s''}$ 生成的子空间，E^u 是由 $e_{s'+2s''+1},\cdots$, e_n 生成的子空间． 显然 E^s, E^u 都是 L 不变的子空间，且 L^s 对于基 $\{e_1,\cdots, e_{s'+2s''}\}$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_{s''} \end{pmatrix},$$

而 L^u 对于基 $\{e_{s'+2s''+1},\cdots, e_n\}$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & C_{r'} & & & \\ & & & D_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & D_{r''} \end{pmatrix}.$$

从而 L^s 的特征值都有负实部，L^u 的特征值都有正实部． 存在性证完，唯一性显然．▌

对于一般的 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，类似于上述定理，有

定理 1.12 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\boldsymbol{R}^n$ 可分解成稳定子空间 E^s，不稳定子空间 E^u 与中心子空间 E^c 的直和，即 $\boldsymbol{R}^n = E^s\oplus E^u\oplus E^c$ 使得

$$L^s = L|E^s,\ L^u = L|E^u,\ L^c = L|E^c$$

的特征值实部分别小于零、大于零、等于零．

例 2 设

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

则 $E^s=\mathrm{span}\{(1,-4)\}$，$E^c=\mathrm{span}\{(1,0)\}$ ($\mathrm{span}\{x\}$ 表示由向量 x 生成的子空间)，$E^u=\varnothing$．

例 3 设

$$L=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

则 $E^s=\mathrm{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$，$E^u=\mathrm{span}\{(0,0,1)\}$，$E^c=\varnothing$。

下面我们讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 上的线性自同构． $\boldsymbol{R}^n$ 上所有线性自同构组成的集合记作 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$。

设 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的．如果用 $L_t(x)$ 表示 L 导出的流，即 $L_t=\varphi(t,\cdot)=\mathrm{e}^{tL}$，则 $L_1=\mathrm{e}^L\in\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$．由假设 L 没有位于虚轴上的特征值，由命题 1.10 可知 $L_1=\mathrm{e}^L$ 没有位于复平面中单位圆周 S^1 上的特征值．于是我们给出以下定义:

定义 如果 $\boldsymbol{R}^n$ 上的线性自同构 A 的复谱与复平面上单位圆周 S^1 不交，则称 A **是双曲的**． $\boldsymbol{R}^n$ 上所有双曲线性自同构组成的集合记作 $\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$。当 $A\in\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$ 时，称 A 在 S^1 内的特征值的个数为 A 的**指数**.

由此定义，每一个双曲线性向量场 L 导出的流 $L_t(x)=\mathrm{e}^{tL}x$ 对应的算子 $L_t=\mathrm{e}^{tL}$，当 $t\neq 0$ 时是双曲线性自同构.

定理 1.13 如果 $A\in\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$， 则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的唯一直和分解 $\boldsymbol{R}^n=E^s\oplus E^u$，使得 E^s 与 E^u 对 A 都是不变子空间，且 $A^s\equiv A|E^s$，$A^u\equiv A|E^u$ 的特征值分别在 S^1 内，S^1 外。

定理 1.14（分解定理） 如果 $A\in\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$，则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个范数$|\cdot|_1$，使得此范数导出的 A^s 与 $(A^u)^{-1}$ 的算子模 $\|A^s\|_1$，$\|(A^u)^{-1}\|_1$ 皆小于 1。即 A^s 在 E^s 上收缩，A^u 在 E^u 上扩张。

证明 设 A^s 的标准型为

$$\begin{pmatrix}A_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}\end{pmatrix},$$

其中 A_i，B_j 如定理 1.11 所述。对于任意 $t\in \boldsymbol{R}$，定义矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(t) & & & \\ & & & B_1(t) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$A_i(t)=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & t & \lambda_i \end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,s';$$

$$B_j(t)=\begin{pmatrix} C_j & & & 0 \\ tI & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & tI & C_j \end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,s''.$$

显然

$$\|A(0)\|=\max_{i,j}\{|\lambda_i|,\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\},$$

所以 $\|A(0)\|<1$。因为 $t\longmapsto A(t)\longmapsto\|A(t)\|$ 是连续映射，所以存在 $\varepsilon>0$，使 $\|A(\varepsilon)\|<1$。由定理 1.9 的推论得知，存在 E^s 的另一组基 $\{e'_1,\cdots,e'_{s'+2s''}\}$，使得在这组基之下 A^s 的矩阵是 $A(\varepsilon)$。我们在 E^s 中定义一个新的内积：

$$\langle e'_i,e'_j\rangle_1=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,s'+2s''.$$

令 $|\cdot|_1^s$ 是由 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 给出的范数。在此范数之下，$\|A^s\|_1^s<1$。类似地，可以在 E^u 中得到范数 $|\cdot|_1^u$，使得 $\|(A^u)^{-1}\|_1^u<1$。在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义范数 $|v|_1=\max\{|v^s|_1^s,|v^u|_1^u\}$，其中 $v=v^s+v^u$ 是 v 在 E^s，E^u 上的直和分解，$v^s\in E^s$，$v^u\in E^u$。此范数就满足定理的要求。∎

推论 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的，E^s，E^u 分别是 L 的稳定子空间、不稳定子空间，$L_t(x)$ 是 L 导出的流，则 $L_t(x)$ 当 $x\in E^s$，

$t \to +\infty$或 $x \in E^u$, $t \to -\infty$ 时趋于原点.

证明 由前面的讨论与定理 1.14 知存在 E^s 中的范数 $|\cdot|_1$，使得 $\|L_1^s\|_1 < 1$，从而，当 $x \in E^s$ 时

$$|L_n(x)|_1 = |L_1^n(x)|_1 \leqslant \|L_1^s\|_1^n |x|_1,$$

因此，当 $n \to +\infty$时，$L_n(x) \to 0$. 下面来证 $t \to +\infty$时 $L_t(x) \to 0$.

考虑 $t \in [0, 1]$. 由于 $L_t(x)$ 连续，$L_t(0) = 0$，所以，任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta(t) > 0$，使得当 $|y|_1 < \delta(t)$ 就有 $|L_t(y)|_1 < \varepsilon$. 由于[0,1]是紧的，因此存在与 t 无关的 $\delta > 0$，使得当$|y|_1 < \delta$, $t \in [0,1]$ 时，$|L_t(y)|_1 < \varepsilon$. 因 $n \to \infty$时 $L_n(x) \to 0$，所以对 $\delta > 0$ 存在正整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$时，$|L_n(x)|_1 < \delta$. 于是，当 $t \geqslant n_0$时，我们将 t 表为 $n + \bar{t}$，其中 $n \geqslant n_0$, $\bar{t} \in [0, 1)$. 由流的性质就得到

$$|L_t(x)|_1 = |L_{\bar{t}}(L_n(x))|_1 < \varepsilon,$$

即 $t \to +\infty$时 $L_t(x) \to 0$.

另一结论可类似地证明. ▋

本节中上述定义、定理都是在 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中给出的，而事实上，所有结论在 Banach 空间中也都成立. 特别，在 Banach 空间中也有分解定理，本书后面要用到它.

定理 1.15 设 B 是 Banach 空间，$|\cdot|$记它的范数. $L: B \to B$ 是双曲线性自同构，则在 B 上存在一个等价的范数$|\cdot|_1$与 B 的直和分解$B = E^s \oplus E^u$，使得 E^s, E^u 在L的作用下不变，且令 $L^s = L|E^s$, $L^u = L|E^u$，就有 L^s 与 $(L^u)^{-1}$ 对于范数$|\cdot|_1$导出的算子模皆小于 1.

证明 由 Banach 空间的谱理论知

$$P = \frac{-1}{2\pi i}\int_{S^1} R(\lambda; L)\mathrm{d}\lambda$$

是投影算子，其中 $R(\lambda;L) = (\lambda I - L)^{-1}$ 是L的预解式. 令

$$E^s = PB, \quad E^u = (I - P)B,$$

显然 $B = E^s \oplus E^u$ 是直和分解，且 E^s 与 E^u 都是 L 不变的(因 P 与 L 可交换)．由于 S^1 上无谱点，又 S^1 是紧的，由 L^s 的定义可知 L^s 的谱半径 $r_s < 1$．取实数 $a_1 \in (r_s, 1)$，做级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \|(L^s)^n\|.$$

由谱半径公式

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|(L^s)^n\|} = r_s$$

可得

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^{-n} \|(L^s)^n\|} = a_1^{-1} r_s < 1,$$

所以上述级数是收敛的．

利用以上收敛级数来定义范数 $|\cdot|_1$．设 $x \in E^s$，令

$$|x|_1^s = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} |(L^s)^n(x)|,$$

其中 $|\cdot|$ 是空间 B 上原有的范数．

因为 $(L^u)^{-1}$ 的谱半径 r 也小于 1，故取 $a_2 \in (r, 1)$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_2^{-n} \|(L^u)^{-n}\|$$

收敛．于是对任意 $x \in E^u$，令

$$|x|_1^u = \sum_{n=0}^{\infty} a_2^{-n} |(L^u)^{-n}(x)|.$$

对于任意 $x \in B$，$x = x^s + x^u$，$x^s \in E^s$，$x^u \in E^u$，定义

$$|x|_1 = \max(|x^s|_1^s, |x^u|_1^u),$$

不难验证

$$\|L^s\|_1 < a_1, \quad \|(L^u)^{-1}\|_1 < a_2.$$

下面证明 $|\cdot|_1$ 与原范数 $|\cdot|$ 等价．注意，对任意 $x \in E^s$，有

$$|x| \leqslant |x|_1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \|(L^s)^n\| |x|.$$

对 $x \in E^n$ 也有类似的不等式,因此两个范数等价. ∎

命题 1.16 $\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$ 是 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的开稠集.

证明 先证 $\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$ 是 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的开集. 设 $A \in \mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$, 于是任何 $\lambda \in S^1$ 都不是 $\tilde{A} = \mathscr{C}(A)$ 的特征值,因此

$$\det(\tilde{A} - \lambda I) \neq 0,$$

其中 I 是 $\boldsymbol{C}^n$ 上的恒同映射. 由于行列式函数 $\det: \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n) \to \boldsymbol{C}$ 连续,所以存在 $\delta(\lambda)>0$ 与 λ 在 $\boldsymbol{C}$ 中的一个邻域 V_λ, 使得当 $B \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$,

$$\|B - A\| < \delta(\lambda), \ \mu \in V_\lambda$$

时,就有

$$\det(\tilde{B} - \mu I) \neq 0.$$

因 S^1 紧, 故可由 S^1 的开覆盖 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in S^1}$ 中找到有限个开邻域 $V_{\lambda_1}, \cdots, V_{\lambda_m}$, 使得 $S^1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$. 令 $\delta = \min\{\delta(\lambda_1), \cdots, \delta(\lambda_m)\}$, 则当 $B \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$, $\|B - A\| < \delta$, $\mu \in S^1$ 就有

$$\det(\tilde{B} - \mu I) \neq 0,$$

即 $B \in \mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$. 所以 $\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$ 是 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的开集.

再证稠密性. 设 $A \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是它的特征值. 显然对任意 $\mu \in \boldsymbol{R}$, $A + \mu I$ 的特征值是 $\lambda_i + \mu (i = 1, \cdots, n)$. 令 $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_m}$ 是 A 的不在 S^1 上的特征值,

$$\delta_1 = \min\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\},$$

$$\delta_2 = \min\{|1 - |\lambda_{i_1}||, \cdots, |1 - |\lambda_{i_m}||\},$$

$$\delta_3 = \min\{|\alpha|; \alpha + i\beta \in S^1 \text{ 是} A \text{的特征值,而} \alpha \neq 0\}.$$

显然 $\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \delta > 0$. 若 μ 满足 $0 < \mu < \delta$, 则 $\lambda_i + \mu \bar{\in} S^1 (i = 1, \cdots, n)$, 于是 $B = A + \mu I \in \mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 我们取 μ, 使 $0 < \mu < \min\{\varepsilon, \delta\}$, 则 $B = A + \mu I \in \mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$, 且 $\|B - A\| = \|\mu I\| < \varepsilon$. 这证明了 $\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n)$ 在 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠. ∎

命题 1.17 $\boldsymbol{R}^n$ 上的双曲线性向量场组成的集合 $H(\boldsymbol{R}^n)$ 是

$\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的开稠集.

证明 由映射 $\mathrm{Exp}:\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)\to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ 的连续性与命题 1.10 命题 1.16 知 $H(\boldsymbol{R}^n)=\mathrm{Exp}^{-1}(\mathrm{HL}(\boldsymbol{R}^n))$是开集. 稠密性的证明与上命题类似. ∎

§1.3 微分动力系统、拓扑共轭、拓扑等价

定义 令G表示实数拓扑加群$\boldsymbol{R}$或整数拓扑加群$\boldsymbol{Z}$, X是拓扑空间,一个连续映射 $\varphi:G\times X\to X$ 具有以下性质:

(1) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$, 对任意 $x\in X$, $s,t\in G$;

(2) $\varphi(0,x)=x$, 对任意 $x\in X$,

则称之为X上的一个**动力系统**,空间X称为动力系统φ的**相空间**. 有时强调相空间, 也将动力系统记作 (X,φ). 若X是 C^r 微分流形, 且φ是 C^r 映射 $(r\geqslant 1)$, 则称φ是一个 C^r **微分动力系统.**

例1 设X是一个微分流形,令 $\varphi(t,x)=x$, 对任意 $x\in X$, $t\in G$. 显然(X,φ)是一个动力系统,称之为**平凡动力系统.**

例2 $\boldsymbol{R}^n$ 上线性系统的流 $\varphi(t,x)=e^{tA}x$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义了一个 C^ω(解析)同胚,因此 $(\boldsymbol{R}^n,\varphi)$ 是一个 C^ω 动力系统.

例3 常微分方程 $\dot{x}=f(x)$, $x\in\boldsymbol{R}^n$ (或 M)的流 $\varphi(t,x)$ 定义了一个动力系统, φ 也称为是向量场 f 导出的动力系统. 若 $f\in C^{r-1}$, 此动力系统是 C^r 的.

例4 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义等价关系"$\sim$": $x\sim y \Longleftrightarrow x-y\in\boldsymbol{Z}^n$. 商空间 $\boldsymbol{R}^n/\sim$称为 n **维环面**,记作 T^n.

在二维环面 $T^2=T^1\times T^1$ 上, $\varphi:\boldsymbol{R}\times T^2\to T^2$ 定义为:

$$\varphi(t,([x],[y]))=([x+t],[y+\theta t]),$$

对一切 $([x],[y])\in T^2$, $t\in\boldsymbol{R}$. 显然φ是一个动力系统. θ为有理数时,称φ为**有理流**,每条轨道是拓扑圆; θ为无理数时,称φ为**无理流**,每条轨道是$\boldsymbol{R}$在连续单射下的像,在 T^2 上稠.

命题1.18 若φ是动力系统,则对任意 $t\in G$, $\varphi_t=\varphi(t,\cdot)$:

$X \to X$ 是同胚；若 φ 是 C^r 的，则 φ_t 是 C^r 微分同胚.

证明 因为 $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{id}$. ▌

在研究动力系统时，常通过等价关系讨论不同系统的共同特性. 下面介绍两种常用的等价关系.

定义 令 $f: X \to X$, $g: Y \to Y$ 分别是拓扑空间 X 与 Y 的自同胚. 若存在同胚 $h: X \to Y$ 使关系

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

成立，即 $h \circ f = g \circ h$，则称**同胚 f 与 g 是拓扑共轭的**. 也称同胚 h 为 f 到 g 的一个**拓扑共轭**.

显然拓扑共轭关系是一个等价关系.

由同胚 $f: X \to X$ 可导出 X 上的一个离散动力系统 $\varphi(n,x) = f^n(x)$，对一切 $n \in \boldsymbol{Z}$, $x \in X$. 一般地，我们称 $\varphi_x = \varphi(\cdot, x): G \to X$ 的像为动力系统 φ 过 x 的轨道，记作 $O_\varphi(x)$. 于是 $\{f^n(x), n \in \boldsymbol{Z}\}$ 是离散动力系统 $f^n(x)$ 过 x 的轨道，记作 $O_f(x)$. 若同胚 h 是 f 与 g 间的一个拓扑共轭，则显然有 $h(O_f(x)) = O_g(h(x))$. 因此拓扑共轭是保轨道的. 不难看出拓扑共轭还是保源、保汇的.

定义 称同胚 $h: X \to Y$ 是动力系统 (X, φ) 到 (Y, ϕ) 的**拓扑等价**，如果它将 X 中 φ 的每一条轨道映成 Y 中 ϕ 的一条轨道，且保持轨道的定向，即 $h(\varphi_t(x)) = \phi_{s(t)}(y)$，其中 $s(t)$ 是 t 的严格单调增函数. 我们也说动力系统 (X, φ) 与 (Y, ϕ) 是**拓扑等价的**.

显然拓扑等价也是一种等价关系. 拓扑等价保轨道、保源、保汇.

例 5 考虑动力系统 $(\boldsymbol{R}, \varphi_a)$，其中 φ_a 是 $\boldsymbol{R}$ 上的线性流 $\varphi_a(t, x) = \mathrm{e}^{at}x$. 则对一切 $a \in \boldsymbol{R}$, $(\boldsymbol{R}, \varphi_a)$ 分属三个拓扑等价

类. 首先，若 $a_1 \cdot a_2 > 0$，则恒等映射 id 就是流 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_1})$ 与 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_2})$ 的拓扑等价. 其次，若 $a_1 < 0$，$a_2 \geqslant 0$，则 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_1})$ 与 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_2})$ 不拓扑等价，因为前者有一个汇而后者无汇. 同理若 $a_1 > 0$，$a_2 = 0$，则 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_1})$ 与 $(\boldsymbol{R}, \varphi_{a_2})$ 也不拓扑等价.

例 6 证明环面 $T^2 = T^1 \times T^1$ 上的有理流

$$\varphi_\theta(t,([x],[y])) = ([x+t],[y+\theta t]),$$

都是拓扑等价的.

证明 只要证有理流 φ_θ 拓扑等价于有理流 φ_0.

设 $\theta = q/p$(p, q 互素)，由数论知存在正整数 r, s，使

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = 1 \text{ 或 } -1,$$

故 $h = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ 是 T^2 上的同胚映射. φ_0 的轨道

$$\varphi_0(t,([x],[y])) = ([x+t],[y]),$$

于是

$$\begin{aligned} h(\varphi_0(t,([x],[y]))) &= \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [x+t] \\ [y] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p[x+t] + r[y] \\ q[x+t] + s[y] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [px + ry + pt] \\ [qx + sy + qt] \end{pmatrix} \\ &= \varphi_\theta(pt, h([x],[y])). \end{aligned}$$

命题 1.19 设 f, g 是 M 上的 C^r 向量场，φ, ϕ 是由 f, g 导出的动力系统，h 是 φ 到 ϕ 的拓扑等价，则

(1) $p \in M$，p 是 f 的奇点当且仅当 $h(p)$ 是 g 的奇点；

(2) $p \in M$，φ 过 p 的轨道 $O_\varphi(p)$ 是闭轨当且仅当 ϕ 过 $h(p)$ 的轨道 $O_\phi(h(p))$ 是闭轨；

(3) $O_\varphi(p)$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限集的 h 像是 $O_\phi(h(p))$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限集.

从上面的讨论可以看到若将动力系统(向量场导出的流)按拓扑等价分类,则分在同一类中的流有共同的拓扑性质.

如果类似于同胚间的拓扑共轭，对于动力系统φ与ψ也存在同胚h使对任意 $t\in \boldsymbol{R}$,

$$h\circ\varphi_t=\psi_t\circ h,$$

则显然φ与ψ是拓扑等价的，但我们不按这种等价关系将动力系统分类，因为这种分类过于细．例如,它要求闭轨有相同的周期,这已超出了拓扑性质.

最后声明,拓扑等价本是动力系统之间的关系,但今后我们也说向量场f与g拓扑等价，其含意乃是：它们导出的流φ与ψ拓扑等价.

下面我们对有限维双曲线性向量场进行拓扑分类.

引理 1.20 设 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的,其指数为n，则在$\boldsymbol{R}^n$中存在一个范数$|\cdot|_1$,使得在点$x\in S^{n-1}=\{v\in\boldsymbol{R}^n,|v|_1=1\}$处$L(x)$与$S^{n-1}$横截，即 $r\cdot L(x)\neq 0$，r是S^{n-1}在点x处的法向量.

证明 取$\boldsymbol{R}^n$的一组基$e_1,\cdots,e_n$使L的矩阵为

$$A(1)=\begin{pmatrix} A_1(1) & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(1) & & & \\ & & & B_1(1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(1)\end{pmatrix},$$

其中$A_i(1)$，$B_j(1)$为定理 1.11 中的A_i，B_j.

对任意$t\in\boldsymbol{R}$定义矩阵$A(t)$如下:

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(t) & & & \\ & & & B_1(t) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(t)\end{pmatrix},$$

其中

$$A_i(t)=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & 0\\ t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & t & \lambda_i\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,s';$$

$$B_j(t)=\begin{pmatrix}C_j & & & 0\\ tI & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & tI & C_j\end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,s''.$$

令 L_t 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的线性向量场，其矩阵形如 $A(t)$. 由于 L_0 的矩阵 $A(0)$ 的对角线上元素皆负，所以在 $x\in S^{n-1}$, $L_0(x)$ 与 S^{n-1} 横截. 因为 S^{n-1} 紧，所以只要 $\varepsilon>0$ 充分小，则矩阵为 $A(\varepsilon)$ 的线性向量场也与 S^{n-1} 横截. 根据定理 1.9 的推论，存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基 $\{e'_1,\cdots,e'_n\}$，使 L 的矩阵为 $A(\varepsilon)$. 我们在 $\boldsymbol{R}^n$ 上重新定义内积，令

$$\langle e'_i,e'_j\rangle_1=\delta_{ij},$$

取此内积给出的范数 $|\cdot|_1$ 即可. ∎

命题 1.21 设 L 与 T 都是 $\boldsymbol{R}^n$ 上指数为 n 的线性向量场，则存在一个拓扑等价 $h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，使得对任意 $t\in\boldsymbol{R}$,

$$h\circ L_t=T_t\circ h,$$

其中 L_t, T_t 分别为向量场 L, T 导出的流.

证明 设 $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ 都是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的范数，分别使 L 与 $S_1^{n-1}=\{v\in\boldsymbol{R}^n,\ |v|_1=1\}$，$T$ 与 $S_2^{n-1}=\{v\in\boldsymbol{R}^n,\ |v|_2=1\}$ 横截. 应用定理 1.14 的推论，当 $x\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ 时，

$$\lim_{t\to+\infty}L_t(x)=0,\quad \lim_{t\to-\infty}|L_t(x)|=\infty.$$

再由横截性，轨道 $O_L(x)$ 与 S_1^{n-1} 交于唯一一点. 同理，若 $y\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$，轨道 $O_T(y)$ 与 S_2^{n-1} 交于唯一一点.

令 $h:S_1^{n-1}\to S_2^{n-1}$ 是一个同胚(例如可以令 $h(x)=x/|x|_2$)，下面将 h 开拓到 $\boldsymbol{R}^n$ 上去使之成为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的同胚. 先令 $h(0)=0$，再考虑 $x\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$. 根据前面的讨论，存在唯一的 $t_0\in\boldsymbol{R}$，使得

$L_{-t_0}(x)=S_1^{n-1}$. 令 $h(x)=T_{t_0}h(L_{-t_0}(x))$, 容易看出，对任意 $t\in\boldsymbol{R}$, $h\circ L_t=T_t\circ h$, 且 h 有逆 h^{-1}. 因此下面只须证明 h 与 h^{-1} 连续。

令 $x\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$, $\{x_m\}$ 是任一收敛于 x 的序列，取 $t_m\in\boldsymbol{R}$, 使得 $L_{-t_m}(x_m)\in S_1^{n-1}$; $t_0\in\boldsymbol{R}$ 使 $L_{-t_0}(x)\in S_1^{n-1}$. 由流的连续性，$t_m\to t_0$, $L_{-t_m}(x_m)\to L_{-t_0}(x)$, 因此

$$h(x_m)=T_{t_m}hL_{-t_m}(x_m)\to T_{t_0}hL_{-t_0}(x)=h(x),$$

所以，h 在 $x\neq 0$ 处连续. h 在原点的连续性不难由定理 1.14 的推论与 S_1^{n-1} 的紧性得到. h^{-1} 的连续性可类似地证明. ▌

定理 1.22 设 $L,T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的，L 与 T 拓扑等价当且仅当 L 与 T 的指数相同。

证明 设 L 与 T 是双曲线性向量场，有相同的指数。令 E^s, $E^{s'}$ 分别是 L, T 的稳定子空间，则有

$$\dim E^s=\dim E^{s'}.$$

由命题 1.21 知存在一个同胚 $h_s:E^s\to E^{s'}$ 使得 $h_s\circ L_t^s=T_t^s\circ h_s$, 对任意 $t\in\boldsymbol{R}$. 同理存在一个同胚 $h_u:E^u\to E^{u'}$, 使得 $h_u\circ L_t^u=T_t^u\circ h_u$, 对任意 $t\in\boldsymbol{R}$. 定义映射

$$h:\boldsymbol{R}^n=E^s\oplus E^u\to E^{s'}\oplus E^{u'}=\boldsymbol{R}^n$$

为

$$h(x^s+x^u)=h_s(x^s)+h_u(x^u),$$

显然 h 是同胚，它是从 L_t 到 T_t 的拓扑共轭，对任意 $t\in\boldsymbol{R}$.

反之，令 h 是 L 到 T 的拓扑等价。因 L 与 T 都只以 0 为奇点，由命题 1.19 必有 $h(0)=0$。因为 $x\in E^s$ 的充分必要条件是 x 的 ω 极限集 $\omega(x)=\{0\}$, 而拓扑等价保 ω 极限集，所以 $x\in E^s$ 时有 $\omega(h(x))=\{h(\omega(x))\}=\{0\}$, 从而 $h(x)\in E^{s'}$, 也就是 $h(E^s)\subset E^{s'}$. 类似地有 $h^{-1}(E^{s'})\subset E^s$. 于是 $h|_{E^s}$ 是 E^s 与 $E^{s'}$ 之间的同胚，从而 $\dim E^s=\dim E^{s'}$. 即 L 与 T 指数相同. ▌

第二章 拓扑动力系统简介

大家可能已经注意到，§1.3 名为讨论微分动力系统的性质，但其中一些定义与定理完全没有用到微分流形的性质，而是在拓扑空间中讨论的.为了使这一类概念与结论更加明确,本章集中地讨论拓扑动力系统的性质.

§2.1 拓扑动力系统

定义 G 表示实数拓扑加群 $\boldsymbol{R}$ 或整数拓扑加群 $\boldsymbol{Z}$，X 是拓扑空间,连续映射 $\varphi: G\times X\to X$ 具有以下性质:

(1) $\varphi(s+t, x)=\varphi(s, \varphi(t, x))$，对 $\forall x\in X$，$s, t\in G$;

(2) $\varphi(0, x)=x$，对 $\forall x\in X$，

则称 φ 是一**拓扑动力系统**.

例 1 设 X 是一拓扑空间,令 $\varphi(t, x)=x$，对 $\forall x\in X$，$t\in \boldsymbol{R}$. 显然,φ 是一拓扑动力系统,称之为**平凡动力系统**.

例 2 X 是一拓扑空间,由同胚 $f: X\to X$ 导出一离散动力系统 $\varphi(n,x)=f^n(x)$, $\forall x\in X$，$n\in \boldsymbol{Z}$. 简称之为**离散动力系统** f.

例 3 X 是单位圆周，与实数轴 $\boldsymbol{R}$ 在原点 O 处相切(图 2.1)，N 是圆周上的北极点，$S=O$ 是南极点. $X-\{N\}$ 中的点 x 与 $\boldsymbol{R}$ 上的点 r 按图所示一一对应.

考虑 $\boldsymbol{R}$ 上一个连续映射 $r\to\dfrac{r}{2}$. 对应地得到 X 中的映射 f: $X\to X$，其中令 $f(N)=N$. 称此映射为**北极映射**. 显然 f 是同胚. 由它可导出一离散动力系统 f.

例 4 在二维环面 T^2 上，同胚 $f: T^2\to T^2$ 定义为

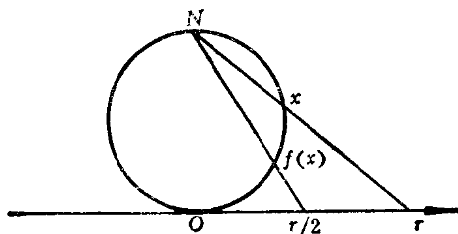


图 2.1

$$f([x],[y])=([x+\theta],[y+\varphi]),$$

其中θ, φ固定．称之为**环面T^2上的旋转**．它导出一离散动力系统．

如果对于θ与φ存在不全为零的整数k_1, k_2，使得$k_1\theta+k_2\varphi=0(\mathrm{mod}1)$，则称$\theta$与$\varphi$**有理相关**，否则称$\theta$与$\varphi$**有理无关**．下面我们会看到不同情况的$\theta$与$\varphi$导出的离散动力系统有极大的差异．

例5 设f是$\boldsymbol{R}^n$中的线性自同构，其在标准基下的矩阵A中的元$a_{ij}\in\boldsymbol{Z}$，且$\det A=\pm1$，从而A^{-1}的元也在$\boldsymbol{Z}$中，于是f与f^{-1}都能保持等价关系"$\sim$"($x\sim y\Longleftrightarrow x-y\in\boldsymbol{Z}^n$)，所以$f$导出$T^n$上的一个同胚$g$，称$g$为**环面自同构**．由$g$又导出一$T^n$中的离散动力系统$g$．

如果A的特征值不在复平面的单位圆周S^1上，则称g为**双曲环面自同构**．

§1.3中所有微分动力系统的例子当然也全都可以作为拓扑动力系统的例子．其实上面的例3—5中的拓扑空间也是一些微分流形．下面介绍一个重要的拓扑动力系统，其中的拓扑空间不具有微分结构．

例6 设有限集$P=\{1,\cdots,k\}$．令Σ表示一切双边序列

$$(x)=(\cdots,x_{-2},x_{-1},x_0^*,x_1,x_2,\cdots)$$

组成的集合．序列(x)中的$x_i\in P$，$\forall i\in\boldsymbol{Z}$，星号"*"加在零位坐

标元素的右上方。

为引进拓扑，定义 Σ 中的柱集 U_n 如下：

$$U_n(a_{-n},\cdots,a_0,\cdots,a_n)=\{(x)\in\Sigma\,|\,x_i=a_i,\ |i|\leqslant n\}.$$

当 n 取遍一切自然数，$a_i(|i|\leqslant n)$ 取遍一切 P 中元素，所得柱集的全体形成 Σ 的一个可数拓扑基。此拓扑空间 Σ 叫**序列空间**。

指定序列中 m 个不同的位置，又在每个位置上取 P 中指定的元素的序列集合是 Σ 中的开集，因为它是若干柱集之并。

不难看出 Σ 是紧空间，并且可度量。事实上，可以在 Σ 中定义度量 d 如下：

$$d((x),(y))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d(x_n,y_n)}{2^{|n|}},$$

其中

$$d(x_n,y_n)=\begin{cases}0, & 当\ x_n=y_n;\\ 1, & 当\ x_n\neq y_n.\end{cases}$$

定义映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$，对任意 $(x)\in\Sigma$，令 $\sigma(x)=(y)$，其中 $y_i=x_{i+1}$，对 $\forall_i\in\mathbf{Z}$，即

$$\begin{aligned}\sigma(x)&=\sigma(\cdots,x_{-2},x_{-1},x_0^*,x_1,x_2,\cdots)\\&=(\cdots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1^*,x_2,\cdots).\end{aligned}$$

不难看出，σ 是 Σ 上的同胚映射，称 σ 为 Σ 上的**移位自同构**。由 σ 导出的离散动力系统称为**符号动力系统**。

例 7 集合 P 如例 6，令 Σ_1 表示一切单边无穷序列

$$(x)=(x_0,x_1,\cdots)$$

的集合，序列中 $x_i\in P(i=0,1,\cdots)$。

类似于例 6 取柱集成拓扑基，得单边序列空间 Σ_1。Σ_1 也是紧度量空间。

定义单边位移 $\sigma_1:\Sigma_1\to\Sigma_1$，$\sigma_1(x)=(y)$，其中 $y_n=x_{n+1}(n=0,1,\cdots)$，即

$$\sigma_1(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(x_1,x_2,\cdots).$$

σ_1 称为**单边序列空间的移位**。显然 σ_1 是连续映射但不是同胚。

任一点 y 在 σ_1 下的原像都有 k 个点.

例 8 设 A 是 $k\times k$ 矩阵, $A=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=0$ 或 1, 对 $\forall i,j=1,\cdots,k$. 若 mn 使 $a_{mn}=1$, 则称 mn **是矩阵 A 所容许的.**

考虑序列空间 Σ 的一个子集合 Σ_A:

$$\Sigma_A=\{(x)\in\Sigma\,|\,a_{x_nx_{n+1}}=1,\ \forall n\in\mathbf{Z}\},$$

即 Σ_A 由 Σ 中一切双边序列组成, 其相邻两元素 x_n 与 x_{n+1} 是由矩阵 A 所容许的. 称矩阵 A 为 Σ_A 的**转移矩阵.**

若 A 中一切元素皆为 1, 则 $\Sigma_A=\Sigma$. 若 $A=E$, 则 Σ_A 中只有 k 个点. 不同的矩阵可能对应相同的 Σ_A. 例如, $P=\{1,2\}$, 而

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Σ_A 也可能是空集, 例如, $P=\{1,2\}$, 而

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

不难看出, Σ_A 的补集是开的, 所以 Σ_A 是 Σ 的紧子空间. 显然 $\sigma\Sigma_A=\Sigma_A$, 所以 $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 是 Σ_A 上的同胚.

本章以下几节中所考虑的拓扑空间 X 设为紧度量空间. 我们讨论 X 上的同胚 f 导出的离散动力系统或连续映射 f 导出的半动力系统.

§2.2 非游荡点集

本节讨论动力系统的非游荡点、非游荡点集,但为了更好地了解它们,将它们与我们比较熟悉的点集——极限点集、周期点集加以比较.

我们先复习周期点集与极限点集的定义与一些性质, 再结合 §2.1 例中给出的动力系统进行考虑.

定义 设X是紧度量空间，$f: X \to X$ 是同胚或连续映射，点$x \in X$，使

$$f^k(x) = x,\ f^m(x) \neq x,\ m = 1, \cdots, k-1,$$

则称x为离散动力系统f的k-**周期点**. l-周期点即**不动点**. 称f的全体周期点组成的集合为f的**周期点集**，记作P或$P(f)$.

例 1 平凡动力系统的任一$x \in X$为不动点，所以周期点集$P = X$. 北极映射f导出的离散动力系统的周期点集 $P = \{N, S\}$. T^2上的旋转动力系统f当θ与φ皆为有理数时，每一轨道只有m个点，T^2上的每一个点都是m-周期点，$P = T^2$. 符号动力系统σ以序列空间Σ中的循环序列 (x)（对某正整数 k，(x) 中 $x_i = x_{i+k}$，$\forall i \in \boldsymbol{Z}$）为周期点. 由于任一柱集都包含有循环序列，所以$\sigma$的周期点在$\Sigma$内稠.

命题 2.1 双曲环面自同构g的周期点集 $P(g) = \boldsymbol{Q}^n/\sim$（$\boldsymbol{Q}$为有理数集），从而周期点集与非周期点集都在$T^n$中稠.

证明 设 $[x] \in \boldsymbol{Q}^n/\sim$，$m$是$[x]$的各坐标之分母的一个公倍数. 因矩阵$A$的元皆为整数，所以$m$仍是$g[x]$的各坐标之分母的一个公倍数. 而$\boldsymbol{Q}^n/\sim$中各坐标之分母公倍数为$m$的点只有有限个，所以$[x]$是$g$的周期点，即$\boldsymbol{Q}^n/\sim \subset P$.

设 $[x] \in P$，则存在正整数k使 $g^k[x] = [x]$，即

$$(A^k - E)x = y \in \boldsymbol{Z}^n.$$

已设A的特征值不在复平面的单位圆周上，所以A^k不以1为特征值. 于是 $A^k - E$ 有逆 $(A^k - E)^{-1}$，且元为有理数. 因此，

$$x = (A^k - E)^{-1} y \in \boldsymbol{Q}^n,$$

即 $[x] \in \boldsymbol{Q}^n/\sim$，所以 $P \subset \boldsymbol{Q}^n/\sim$. ▌

定义 X是紧度量空间，$f: X \to X$ 是同胚或连续映射，点$x \in X$，过x的正半轨道 $\{f^n(x),\ n \geqslant 0\}$ 的极限点叫做x的ω**极限点**. x的全体ω极限点组成的集合称为x的ω**极限集**，记作$L_\omega(x)$. 即

$$L_\omega(x) = \{y \in X \mid \exists n_i \nearrow +\infty \text{ 使 } f^{n_i}(x) \to y\}.$$

令 $L_\omega = \bigcup\limits_{x \in X} L_\omega(x)$，称之为 f 的 ω **极限集**.

若 f 是同胚，则定义 f^{-1} 的 ω 极限集为 f 的 α **极限集**，即

$$L_\alpha(x) = \{y \in X \mid \exists n_i \nearrow +\infty \text{ 使 } f^{-n_i}(x) \to y\}.$$

再令 $L_\alpha = \bigcup\limits_{x \in X} L_\alpha(x)$，称 L_α 为 f 的 α **极限集**.

如果 f 是同胚，f 的**极限点集**是指 $L = L_\omega \cup L_\alpha$；如果 f 是连续映射但不是同胚，称 $L = L_\omega$ 为 f 的**极限点集**.

显然极限点集包含周期点集，即 $P \subset L$.

例 2 平凡动力系统中任一 $x \in X$ 都有

$$L_\omega(x) = L_\alpha(x) = x,$$

从而 $L = X$. 北极映射 f 导出的离散动力系统 f 有

$$L_\omega(N) = L_\alpha(N) = N, \quad L_\omega(S) = L_\alpha(S) = S,$$

对 $\forall x \in X$，$x \neq N, S$，有

$$L_\omega(x) = S, \ L_\alpha(x) = N.$$

所以 $L = \{N, S\}$. 对以上两个例子都有 $P = L$. T^2 上的旋转动力系统 f 当 θ 为无理数，φ 为零时 $L = T^2$，而 $P = \varnothing$.

定义 X 中的集合 E 称为是 f **不变的**，如果 $fE = E$.

命题 2.2 X 是紧度量空间，$f: X \to X$ 是连续映射，$x \in X$，则集合 $L_\omega(x)$ 有性质：非空、闭、f 不变.

证明 因 X 紧，显然 $L_\omega(x)$ 非空. 闭性由定义可得. 下面证 f 不变性.

由 f 的连续性，显然有 $fL_\omega(x) \subset L_\omega(x)$. 下面证

$$L_\omega(x) \subset fL_\omega(x).$$

设 $y \in L_\omega(x)$，只要证 $\exists z \in L_\omega(x)$，使

$$f(z) = y.$$

取 $n_i \nearrow +\infty$ 使 $f^{n_i}(x) \to y$. 考虑序列 $\{f^{n_i - 1}(x)\}$，它有收敛子列

$$f^{n_{i_j} - 1}(x) \to z \in X.$$

于是 $z\in L_\omega(x)$. 由 $f^{n_{ij}}(x)\to f(z)$ 得 $f(z)=y$. ▮

注：若 f 是同胚，还有完全平行于命题 2.2 的关于 $L_\alpha(x)$ 的结论.

定义 X 是紧度量空间，$f:X\to X$ 是连续映射. 称点 $x\in X$ 为 f 的**游荡点**，如果存在 x 的一个开邻域 U，使集合 $f^{-n}(U)(n\geq 0)$ 两两不交. 称点 $y\in X$ 为 f 的**非游荡点**，如果它不是 f 的游荡点. f 的一切非游荡点组成的集合称为 f 的**非游荡点集**，记作 $\Omega(f)$. 显然

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid 对\ x\ 的任一开邻域\ U,\ 存在\ k>0,\ 使\ f^{-k}U\cap U\neq\varnothing\}.$$

若 f 是同胚，由于有

$$f^{-n}U\cap U\neq\varnothing\Longleftrightarrow U\cap f^nU\neq\varnothing,$$

所以

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid 对\ x\ 的任一开邻域\ U,\ 存在\ k\neq 0,\ 使\ f^kU\cap U\neq\varnothing\}.$$

例 3 北极映射 f 以点 N 与 S 为非游荡点，而任一 $x\in X$，$x\neq N, S$ 是游荡点，所以

$$\Omega(f)=\{N, S\}.$$

前面已指出过，对连续映射有 $P\subset L_\omega$，下面还将看到 $L_\omega\subset\Omega$.

定理 2.3 X 是紧度量空间，$f:X\to X$ 是连续映射，则

(1) $L_\omega(f)\subset\Omega(f)$，从而 $\Omega(f)\neq\varnothing$.

(2) $\Omega(f)$ 是闭的.

(3) $f\Omega(f)\subset\Omega(f)$；若 f 是同胚，则 $f\Omega(f)=\Omega(f)$.

证明 (1) 设 $y\in L_\omega(f)$，即有 $x\in X$，$y\in L_\omega(x)$，我们来证 $y\in\Omega(f)$. 考虑 y 的任一邻域 U，$\exists$ 正整数 m, k，$m>k$，使 $f^mx, f^kx\in U$. 于是 $x\in f^{-m}U$，$x\in f^{-k}U$，从而

$$f^{-m}U\cap f^{-k}U\neq\varnothing,\quad f^{-m+k}U\cap U\neq\varnothing.$$

所以 $y\in\Omega(f)$.

(2) 由游荡点定义，游荡点集 $X\backslash\Omega(f)$ 是开集，故非游荡点集 $\Omega(f)$ 是闭集.

(3) 设 $x\in\Omega(f)$，考虑点 $f(x)$. 取 $f(x)$ 的任一邻域 U，则 $f^{-1}U$ 是 x 的一个邻域. 于是 $\exists n>0$，使

$$f^{-n}(f^{-1}U)\cap f^{-1}U\neq\varnothing,$$

从而 $f^{-n}U\cap U\neq\varnothing$，即 $f(x)\in\Omega(f)$. 所以

$$f\Omega(f)\subset\Omega(f).$$

若 f 是同胚，对 f^{-1} 用以上结果得

$$f^{-1}\Omega(f^{-1})\subset\Omega(f^{-1}).$$

对于同胚 f，

$$\Omega(f)=\Omega(f^{-1}).$$

所以又有

$$\Omega(f)\subset f\Omega(f).\ \blacksquare$$

下面的定理给出 $\Omega(f)$ 的另一等价定义.

定理 2.4 X 是紧度量空间，$f:X\to X$ 是连续映射，则

$$\Omega(f)=\{x\in X|\ \text{对}\ x\ \text{的任一邻域}\ U,\ \text{与任一}\ N>0,\ \text{存在}\ n\geqslant N,\ \text{使}\ f^{-n}U\cap U\neq\varnothing\}.$$

证明 显然等式右端之集合是 $\Omega(f)$ 的子集. 为证相反的包含关系，设 $x\in\Omega(f)$，U 是 x 的一个邻域，$N>0$. 如果 x 是 f 的周期点，则显然有某个 $n\geqslant N$，使

$$f^{-n}U\cap U\neq\varnothing.$$

如果 x 不是 f 的周期点，我们取 $r>0$，使球形邻域 $B(x,r)\subset U$. 下面来证，存在 δ，$0<\delta<r$，使

$$B(x,\delta)\cap f^{-i}B(x,\delta)=\varnothing,$$

对一切 $i,i=1,\cdots,N-1$. 事实上，若没有以上断言中的 δ，则对于 n，$n>\dfrac{1}{r}$，即 $\dfrac{1}{n}<r$ 就存在 x_n 与某个 i_n，$1\leqslant i_n\leqslant N-1$，使

$$x_n\in B\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\cap f^{-i_n}B\left(x,\ \frac{1}{n}\right).$$

于是有自然数序列 $\{n_j\}$，$j\to\infty$ 时 $n_j\to\infty$，使 $i_{n_j}=k$，$1\leqslant k\leqslant N-1$，对一切 j. 从而 $x_{n_j}\in B\left(x,\ \frac{1}{n_j}\right)$，且 $f^k(x_{n_j})\in B\left(x,\ \frac{1}{n_j}\right)$，于是 $x_{n_j}\to x$，且 $f^k(x_{n_j})\to x$. 由 f 的连续性得 $f^k(x)=x$，这与 x 不是 f 的周期点矛盾. 所以断言得证. 因 $x\in\Omega(f)$，一定存在某个 $n_1\geqslant 1$，使

$$B(x,\ \delta)\cap f^{-n_1}B(x,\ \delta)\neq\varnothing.$$

于是此 $n_1\geqslant N$. 这就证明了 $\exists n_1\geqslant N$，使

$$f^{-n_1}U\cap U\neq\varnothing. \blacksquare$$

如果 f 是同胚，显然非游荡点集可定义如下:

$$\Omega(f)=\{x\in X\,|\,\text{对 } x \text{ 的任一邻域 } U \text{ 与任一 } N>0,\ \text{存在 } n\geqslant N \text{ 使 } f^nU\cap U\neq\varnothing\}.$$

§2.3 动力系统的极小性

定义 X 是紧度量空间，称同胚 $f:X\to X$ 或动力系统 f 是**极小的**，如果对 $\forall x\in X$，x 的 f 轨道

$$O_f(x)=\{f^nx\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$$

在 X 中稠.

例 1 平凡动力系统是极小的当且仅当 X 只含一个点. 北极映射 f 不是极小的，因为 $P(f)\neq\varnothing$. 环面 T^2 上的旋转动力系统 f，当其中 θ 与 φ 有理相关时不是极小的.

例 2 环面 T^2 上的旋转 $f:T^2\to T^2$，

$$f([x],[y])=([x+\theta],[y+\varphi]),$$

当 θ 与 φ 有理无关时，任一轨道在 T^2 上稠，从而 f 是极小的.

证明 考虑 T^2 上充分光滑的函数 $h([x],[y])$，$h(x,y)$ 表示它在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的开拓，$h(x,y)$ 是 x,y 的周期函数，周期为 1. 将 $h(x,y)$ 展成富氏级数，得到

$$h(x, y) = a_0 + \sum_{\substack{k_1, k_2 = -\infty \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}}^{\infty} a_{k_1 k_2} e^{i2\pi(k_1 x + k_2 y)}.$$

先来证明 $h(x,y)$ 沿 f 的轨道

$$O_f = \{([x_0 + n\theta], [y_0 + n\varphi]) | n \in Z\}$$

的平均值

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} h([x_0 + j\theta], [y_0 + j\varphi])$$
$$= a_0 \left(= \iint_{T^2} h(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right).$$

事实上,

$$\left| \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} h([x_0 + j\theta], [y_0 + j\varphi]) - a_0 \right|$$
$$= \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{\substack{k_1, k_2 = -\infty \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}}^{\infty} a_{k_1 k_2} e^{i2\pi[(k_1 x_0 + k_2 y_0) + j(k_1\theta + k_2\varphi)]} \right|.$$

取 K 使 $\sum_{|k_1|+|k_2|>K} |a_{k_1 k_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$上式 \leqslant \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{\substack{|k_1|+|k_2| \leqslant K \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}} a_{k_1 k_2} e^{i2\pi[(k_1 x_0 + k_2 y_0) + j(k_1\theta + k_2\varphi)]} \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2n+1} \sum_{\substack{|k_1|+|k_2| \leqslant K \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}} \left| a_{k_1 k_2} e^{i2\pi(k_1 x_0 + k_2 y_0)} \right|$$
$$\times \frac{2}{|1 - e^{i2\pi(k_1\theta + k_2\varphi)}|} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $k_1\theta + k_2\varphi \neq 0 (\mathrm{mod} 1)$, 故当 n 充分大时, 上式中前一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 这就求得了平均值.

如果轨道 O_f 在 T^2 上不稠, 则存在 T^2 上的邻域 B 使其中没有 O_f 的点。取 B 内小邻域 B_δ, 令 $h(x,y)$ 充分光滑, 满足 B_δ 上取

值为1，B外取值为零，$B\backslash B_\delta$上取正值．于是$a_0\neq 0$，但沿轨道O_f的平均值为零，矛盾．

§2.4 拓扑传递性

本节中的X仍表示紧度量空间。

下面讨论的拓扑传递性是一个较极小性为弱的性质．

定义 称同胚$f:X\to X$为**拓扑传递的**，如果存在某个$x\in X$，使轨道

$$O_f(x)=\{f^n(x)\mid n\in \mathbf{Z}\}$$

在X内稠．

称连续映射$f:X\to X$为**单边拓扑传递的**，如果存在某个$x\in X$，使正半轨道

$$O_f^+(x)=\{f^n(x)\mid n\geqslant 0\}$$

在X内稠．

以上两个概念对同胚都有意义．由定义，一个同胚是单边拓扑传递的必定是拓扑传递的，但拓扑传递不一定单边拓扑传递．

例1 序列空间Σ中的符号动力系统σ是拓扑传递的，也是单边拓扑传递的．

例2 设$X=\left\{0,1,\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\,\middle|\, n\geqslant 2\right\}$，取由$\mathbf{R}$导出的拓扑．定义同胚$f:X\to X$如下：

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,$$

f将任一点$x\in X\backslash\{0,1\}$映为其左边的一点．则f拓扑传递，但不单边拓扑传递．事实上，取$x\neq 0,1$，它的f轨道

$$O_f(x)=\{f^n(x)\mid n\in \mathbf{Z}\}=X\backslash\{0,1\}$$

在X内稠，故f拓扑传递；显然f不单边拓扑传递．

下面先分别给出两个定义的一些等价说法，然后讨论它们之间的关系．

定理 2.5 对于紧度量空间 X 上的同胚 $f:X\to X$，以下结论等价：

(1) f 是拓扑传递的；

(2) 若 E 是 X 的闭子集，使 $fE=E$，则 $E=X$ 或 E 无处稠（即若 U 是 X 的开子集，使 $fU=U$，则 $U=\varnothing$ 或 U 稠）.

(3) 若 U，V 是非空开集，则存在 $n\in\boldsymbol{Z}$，使

$$f^nU\cap V\neq\varnothing.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)：由定义，$\exists x_0\in X$，使 $O_f(x_0)$ 在 X 内稠. 设 U 是 X 的开子集，$U\neq\varnothing$，则 $\exists n_0\in\boldsymbol{Z}$，使 $f^{n_0}(x_0)\in U$. 因为 $fU=U$，所以 $O_f(x_0)\subset U$，从而 U 在 X 中稠.

(2)$\Longrightarrow$(3)：若开集 $U\neq\varnothing$，则 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}f^nU$ 也是非空开集，且 f 不变，由(2)，它在 X 内稠. 因 V 是非空开集，所以，

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}f^nU\cap V\neq\varnothing,$$

即 $\exists n\in\boldsymbol{Z}$，使

$$f^nU\cap V\neq\varnothing.$$

(3)$\Longrightarrow$(1)：X 是紧度量空间，有可数基 $U_1,U_2,\cdots,U_n,\cdots$. 令集合

$$F_n=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}f^mU_n\ (n=1,2,\cdots),$$

它们都是非空、开的、f 下不变的. 并且由(3) F_n 还是稠的. 它们的交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 非空. 这是因为否则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}X\backslash F_n=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n}=X,$$

左端是可列个无处稠集（开稠之补）之并，是第一纲集，而右端是完备度量空间，是第二纲集，矛盾. 我们取 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则 $O_f(x_0)$ 在 X 中稠. 这是因为

$$x_0 \in F_n = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} f^m U_n (n = 1, 2, \cdots).$$

从而 $\exists m_n \in \mathbf{Z}$，使 $x_0 \in f^{m_n} U_n (n = 1, 2, \cdots)$，即

$$f^{-m_n} x_0 \in U_n (n = 1, 2, \cdots),$$

亦即 $O_f(x_0) = \{f^n(x_0) | n \in \mathbf{Z}\}$ 在 X 中稠. 所以 f 是拓扑传递的. ▮

为了得到单边拓扑传递的类似定理，需要设连续映射 f 为满的,即 $fX = X$. 另外注意,若 $E \subset X$，则

$$E \subset f^{-1}E \Longleftrightarrow fE \subset E.$$

定理 2.6 设连续映射 $f: X \to X$ 满足条件 $fX = X$，则以下结论等价:

(1) f 是单边拓扑传递的;

(2) 若 E 是 X 的闭子集，$E \subset f^{-1}E$，则 $E = X$ 或 E 无处稠(即若 U 是 X 的开子集，$f^{-1}U \subset U$，则 $U = \varnothing$ 或 U 稠);

(3) 若 U, V 是非空开集,则存在 $n \geqslant 1$，使

$$f^{-n} U \cap V \neq \varnothing.$$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2): 由定义，$\exists x_0 \in X$，使 $\{f^n(x_0) | n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠. 设 E 是闭集，若 E 含非空开集 V，则 $\exists k \geqslant 0$，使 $f^k x_0 \in V \subset E$. 因 $fE \subset E$，所以

$$\{f^n x_0 | n \geqslant k\} \subset E.$$

而 $\overline{\{f^n(x_0) | n \geqslant 0\}} = X$，所以

$$\{x_0, fx_0, \cdots, f^{k-1}x_0\} \cup E = X.$$

在等式两端以 f 作用,注意条件 $fX = X$，$fE \subset E$，得

$$\{fx_0, \cdots, f^{k-1}x_0\} \cup E = X.$$

重复以 f 作用,得 $E = X$. 若 E 闭,不含非空开集,则 E 是无处稠集.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 设 U, V 是非空开集，因 $fX = X$，所以集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} U$ 是非空开集,且

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}U\right) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}U.$$

由 (2)，$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}U$ 在 X 中稠，于是 $\exists m \geqslant 1$，使

$$f^{-m}U \cap V \neq \varnothing.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)：取 X 的可数基 $\{U_n, n=1, 2, \cdots\}$，则集合

$$F_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}U_n (n=1, 2, \cdots)$$

是非空、开集、f 不变，由(3)，F_n 是 X 中稠集，它们的交非空．取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$，则 $x_0 \in F_n (n=1, 2, \cdots)$，于是 $\exists m_n \geqslant 1$，使

$$x_0 \in f^{-m_n}U_n (n=1, 2, \cdots),$$

即 $f^{m_n}x_0 \in U_n (n=1, 2, \cdots)$，所以

$$O_f(x_0) = \{f^n(x_0) \mid n \geqslant 0\}$$

在 X 中稠．▮

由下面的例子可以看到定理中的条件 $fX = X$ 是不可少的．

例 3 令 $X = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \geqslant 1\right\} \cup \{0\}$．取实数轴导出的拓扑．定义 $f: X \to X$ 为

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} (n=1, 2, \cdots).$$

轨线 $\{f^n(1) \mid n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠，f 是单边拓扑传递的．但(2)不成立，因为取 X 的闭子集 $E = X \setminus \{1\}$，显然 $E \subset f^{-1}E$，但 $E \neq X$，E 也非无处稠．

以下定理给出，f 为同胚时两种传递之间的关系．

定理 2.7 设 $f: X \to X$ 是同胚，则 f 是单边拓扑传递的 $\Longleftrightarrow$ f 是传递的且 $\Omega(f) = X$．

证明 我们先证"$\Longrightarrow$"．f 是单边拓扑传递的，故 $\exists x_0$ 使 $\{f^n(x_0) \mid n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠，从而 f 是拓扑传递的．如果 $\Omega(f) \neq X$，即 f 有游荡点，则必存在非空开集 U，使集合 f^nU，$n \in \mathbb{Z}$ 两两

不交. 对于开集 U, 必有某个 $pn_0 \geqslant 0$ 使 $f^{n_0}(x_0) \in U$, 从而

$$f^{n+n_0}(x_0) \in f^n U(n = 0, 1, \cdots).$$

所以只余下 n_0 个点: $x_0, f(x_0), \cdots, f^{n_0-1}(x_0)$ 属于无穷多个不交的开集 $f^{-m}U(m = 1, 2, \cdots)$, 这与 $\{f^n(x_0) | n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠矛盾.

再证"$\Longleftarrow$". 已知 f 是拓扑传递的, 又 $\Omega(f) = X$, 我们应用定理 2.6 中的(3)来证明 f 是单边拓扑传递的. 设 U, V 是非空开集,需要找一个 $k \geqslant 1$, 使 $f^{-k}U \cap V \neq \varnothing$. 根据定理 2.5 中的(3), $\exists N \in \boldsymbol{Z}$, 使

$$f^N U \cap V = W \neq \varnothing.$$

如果 $N < 0$, 则 k 已找到;如果 $N \geqslant 0$, 由于 $\Omega(f) = X$, 根据定理 2.4, 对开集 W, $\exists n \geqslant N + 1$, 使 $f^{-n}W \cap W \neq \varnothing$, 但

$$f^{-(n-N)}U \cap V \supset f^{-n}W \cap W,$$

所以

$$f^{-(n-N)}U \cap V \neq \varnothing.$$

取 $k = n - N \geqslant 1$ 即可. ▮

§2.5 拓扑混合性

定义 X 是紧度量空间, $f: X \to X$ 是同胚, 称 f 是**拓扑混合的**, 如果对任意两个非空开集 $U, V \subset X$, 存在 N, 使当 $n > N$ 时,

$$f^n U \cap V \neq \varnothing.$$

定理 2.8 若 f 是拓扑混合的,则 f 是拓扑传递的.

证明 由拓扑混合的定义立刻得到定理 2.5 中 (3) 成立, 所以 f 是拓扑传递的. ▮

上节中已讲到过符号动力系统 σ 是拓扑传递的, 下面可以看到它有更强的性质.

命题 2.9 序列空间 Σ 中的符号动力系统 σ 是拓扑混合的.

证明 设 U, V 是 Σ 中的非空开集，取 $a \in U, b \in V$，则存在柱集 $U_N(a)$ 与 $U_N(b)$，使

$$U \supset U_N(a) = \{(x) \in \Sigma \mid x_i = a_i, \quad |i| \leqslant N\},$$
$$V \supset U_N(b) = \{(x) \in \Sigma \mid x_i = b_i, \quad |i| \leqslant N\}.$$

于是

$$\sigma^n U \cap V \supset \sigma^n U_N(a) \cap U_N(b), \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

而当 $n \geqslant 2N+1$ 时，

$$\sigma^n U_N(a) \cap U_N(b) = \{(z) \in \Sigma \mid z_i = b_i,$$
$$|i| \leqslant N, \ z_j = a_{j+n}, \ |j+n| \leqslant N\} \neq \varnothing.$$

所以当 $n \geqslant 2N+1$ 时，$\sigma^n U \cap V \neq \varnothing$. ▌

注：在 Σ_A 中符号动力系统 σ 不一定是拓扑混合的.

例 1 令 $P = \{1, 2\}$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，取 Σ_A 中开集 U, V 如下：

$$U = \{(x) \in \Sigma_A \mid x_0 = 1\} = \{(\cdots, 1, \overset{*}{1}, 1, \cdots)\},$$
$$V = \{(x) \in \Sigma_A \mid x_0 = 2\} = \{(\cdots, 2, \overset{*}{2}, 2, \cdots)\}.$$

显然对任意 n，

$$\sigma^n U \cap V = U \cap V = \varnothing.$$

下面对矩阵 A 加条件，使 σ 在 Σ_A 上是拓扑混合的. 不失一般性，设矩阵 A 的任一行或列都有元素非零，因为否则某个 i_0 在序列中不出现，可以认为集合

$$P = \{1, \cdots, i_0 - 1, i_0 + 1, \cdots, k\},$$

即此时 P 只包含 $k-1$ 个元素，令 $P = \{1, \cdots, k-1\}$ 即可.

定理 2.10 $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$ 是拓扑混合的 $\Longleftrightarrow$ 存在整数 $M > 0$，使 $A^M > 0$（即 A^M 的一切元 $(A^M)_{ij}$ 皆正）.

证明 不难对 m 用归纳法验证以下断言：$(A^m)_{ij} > 0 \Longleftrightarrow$ 存在一个由 $P = \{1, \cdots, k\}$ 中的整数组成的 $m+1$ 个数的有序数组：$a_0, a_1, \cdots, a_m$，满足：

(1) $a_0 = i$，$a_m = j$；

(2) $A_{a_n a_{n+1}} = 1$, $0 \leqslant n \leqslant m-1$.

下面证定理. $\Longrightarrow$成立. 因为 Σ_A 中柱集

$$U_i = \{(x) \in \Sigma_A \mid x_0 = i\} \quad (i = 1, \cdots, k)$$

非空,由设 $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$ 是拓扑混合的,所以对任意 $i, j \in \{1, \cdots, k\}$, 存在整数 N_{ij}, 使当 $n > N_{ij}$ 时,

$$\sigma^n U_i \cap U_j \neq \varnothing.$$

设序列 $(a) \in \sigma^n U_i \cap U_j$, 则 $a_{-n} a_{-n+1} \cdots a_0$ 就满足上述断言中的条件(1)与(2),从而 $(A^n)_{ij} > 0$. 取 $N = \max\limits_{i,j} N_{ij}$, 当$M > N$时就有 $A^M > 0$.

$\Longleftarrow$成立. 因矩阵A的每一行、每一列都有元素为 1, 又假设对某个$M > 0$ 有 $A^M > 0$,从而对一切 $m \geqslant M, A^m > 0$. 取 Σ_A 中两个开集U与 V, $(a) \in U$, $(b) \in V$. 则存在N使得柱集

$$U_N(a) = \{(x) \in \Sigma_A \mid x_i = a_i, \ |i| \leqslant N\} \subset U,$$

$$U_N(b) = \{(x) \in \Sigma_A \mid x_i = b_i, \ |i| \leqslant N\} \subset V.$$

对于一切 $n \geqslant 2N + M$, 则 $n - 2N > M$, 所以 $A^{n-2N} > 0$. 记 $n - 2N$ 为 m. 由上述断言, 可以找到P中整数作成的有序数组 $c_0, \cdots, c_m$, 满足

(1) $c_0 = b_N$, $c_m = a_{-N}$;

(2) $A_{c_k c_{k+1}} = 1 (k = 0, 1, \cdots m-1)$.

于是存在 Σ_A 中的元素(z)有以下形式:

$$(z) = (\cdots, b_{-1}, \underset{*}{b_0}, \cdots, b_N, c_1, \cdots, c_{m-1}, a_{-N}, \cdots, a_0, \cdots, a_N, \cdots).$$

显然此 $(z) \in U \cap \sigma^n V$. 所以$\sigma$在 Σ_A 上是拓扑混合的. ▮

拓扑混合与极小都是较拓扑传递为强的性质,至于它们之间,我们注意到,Σ 上的移位自同构 σ 是拓扑混合的, 但不是极小的,因为它有周期点(在下一章中我们还会看到 T^2 上的双曲自同构也是拓扑混合的,但我们已知它不是极小的, 因为它也有周期点). 而环面 T^2 上的旋转, 当θ与φ有理无关时是极小的,但显然它不是拓扑混合的.

第三章　结构稳定性与双曲性的初步讨论

上一章中讨论拓扑动力系统的性质，着重研究的是一个系统的轨道的渐近行为.

本章讨论微分动力系统的性质，着重研究一个系统作微小变动后所得系统与原系统的关系，也就是所谓的结构稳定性问题.我们将通过具体的典型例子讨论结构稳定性与双曲性的关系.

本章也是主要研究离散的微分动力系统，即微分同胚，但也有一些对于流的讨论.

§3.1　结构稳定性的概念

我们先给出微分同胚结构稳定的定义.

定义　设M是紧的光滑流形，$A: M\to M$是微分同胚，如果存在A在$\mathrm{Diff}^1(M)$（全体M上的C^1微分同胚作成的空间）中的一个邻域U，使任一微分同胚$B\in U$，皆与A拓扑共轭，则称**微分同胚**A在C^1拓扑下**结构稳定**.

我们在第一章中指出过，两个同胚拓扑共轭时，它们导出的两个离散动力系统的主要性质(拓扑性质)是相同的，所以若A结构稳定，则对它作微小扰动并不会改变导出的离散动力系统的主要性质.

下面给出微分方程结构稳定，或方程的流即连续动力系统结构稳定的定义.

定义　对于光滑紧流形M上的微分方程$\dot{x}=f(x)$，如果存在向量场f在$\mathscr{X}^1(M)$（全体M上的C^1向量场构成的空间）中的一个邻域，使得邻域内任一向量场g所导出的流ψ与f所导出

的流 φ 拓扑等价，则称此**微分方程**在 C^1 拓扑下**结构稳定**或简称**系统 (M, φ) 结构稳定**，也称**流 φ 结构稳定**.

第一章中我们已看到拓扑等价的流有共同的拓扑性质，所以若流 φ 结构稳定，则对于导出它的向量场 f 作微小的扰动不会改变流的拓扑性质.

下面的几个例子中，流形 M 都比较简单，C^1 拓扑很具体. 对于一般的流形 M，C^1 拓扑以至于 C^r 拓扑将在本章的最后来阐明.

§3.2 圆周上的微分同胚的结构稳定性

我们先讨论圆周上的一个最简单的微分同胚——旋转.

例 1 在实数轴 $\boldsymbol{R}$ 上定义等价关系"～"：

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}.$$

商空间 $\boldsymbol{R}/\sim$ 是圆周，记作 T^1. 微分同胚

$$A:\ T^1 \to T^1,\quad A([x]) = [x+\theta],$$

其中 θ 为常数，则称此 A 为**圆周 T^1 上的旋转**，θ 叫**旋转角**. 显然两个旋转 A_1 与 A_2 的旋转角 θ_1 与 θ_2 满足 $\theta_1 = \theta_2 (\mathrm{mod} 1)$ 时，$A_1 = A_2$.

当 θ 为有理数，$\theta = \dfrac{p}{q}$ (p, q 互素)时，动力系统 A 的每一轨道只有 q 个点，每一个点是 q 周期点.

当 θ 为无理数时，A 的每一轨道在 T^1 上稠.

由此立刻可以断言：无论旋转角 θ 是有理数或无理数，微分同胚旋转

$$A:\ T^1 \to T^1,\quad A[x] = [x+\theta]$$

都是结构不稳定的.

下面讨论圆周 T^1 上一般的保定向微分同胚.

定义 圆周 T^1 上的微分同胚 A 称为是**保定向的**，如果对 $\forall y_1, y_2, y_3 \in T^1$，都有 Ay_1，Ay_2，Ay_3 与 y_1，y_2 y_3 同方向.

例2 考虑环面 T^2 上的微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\omega_1(x, y), \\ \dot{y}=\omega_2(x, y),\end{cases} \quad x, y \in T^2.$$

若 $\omega_1, \omega_2 \in C^1$, 又 $\omega_1 \neq 0$, 则相除之后开拓到 $\boldsymbol{R}^2$ 上的双周期微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda(x, y), \quad \lambda=\frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{1}$$

由于 $\lambda(x, y)$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上有界,连续,对 y 有有界连续偏导数，所以一切解可以无限延拓到$(-\infty,+\infty)$.

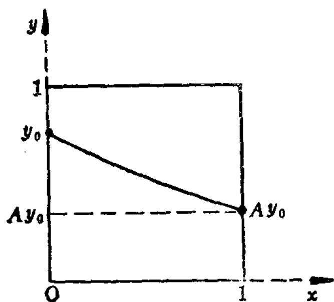


图 3.1

我们来定义一个 $\boldsymbol{R}$ 上的映射 A. 对任意 $y_0 \in \boldsymbol{R}$, 取方程(1)过 y 轴上点 $(0, y_0)$ 的解曲线 $y=y(x, y_0)$, 令 $Ay_0=y(1, y_0)$. 显然映射 $A: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的微分同胚. 因方程(1)有周期性,故可由A导出 T^1 上的微分同胚,仍记作 A. 显然 $A: T^1 \to T^1$ 保定向(如图 3.1).

我们称此 $A: T^1 \to T^1$ 是环面 T^2 上微分方程导出的 Poincaré 映射.

讨论圆周 T^1 上保定向微分同胚时，为了方便常将A开拓到 $\boldsymbol{R}$ 上,得到 $\boldsymbol{R}$ 上的微分同胚,仍记作 A. A 具有性质:

(1) $A(y+1)=A(y)+1$;

(2) $A'(y)>0$ $(y_1>y_2 \Longrightarrow Ay_1>Ay_2)$.

由以上性质,立刻可以得到关系式:

$$A(y+k)=A(y)+k,$$
$$A^n(y+1)=A^n(y)+1,$$
$$A^n(y+k)=A^n(y)+k$$

与

$$y_1 > y_2 \Longrightarrow A^n y_1 > A^n y_2.$$

这些性质后面常要用。显然上述开拓不唯一，但是任意两个开拓之差为一整数.

定义 称函数 $a(y) = A(y) - y$ 为A的**角函数**。

显然，$a(y)$ 是1-周期函数，由开拓A所确定.

命题 3.1 对任意保定向微分同胚 $A: T^1 \to T^1$ 的开拓 A，极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a(y) + a(Ay) + \cdots + a(A^{k-1}y)}{k}$$

存在，且与 y 无关(故可称此极限值为**开拓A的旋转数**).

证明 (1) 记分子为 $a_k(y)$，即令

$$a_k(y) = a(y) + a(Ay) + \cdots + a(A^{k-1}y) = A^k(y) - y.$$

我们来证，对于任意两点 y_1 与 y_2，有

$$|a_k(y_1) - a_k(y_2)| < 1.$$

这是因为

$$|a_k(y_1) - a_k(y_2)| = |[A^k(y_1) - A^k(y_2)] - (y_1 - y_2)|,$$

而 $A^k(y_1) - A^k(y_2)$ 与 $y_1 - y_2$ 同号，又 A^k 将长为 1 的区间映成长为 1 的区间，所以上式当 $|y_1 - y_2| \leqslant 1$ 时成立。再应用 $a_k(y)$ 的1-周期性，上式对任意 y_1，y_2 成立。

由此不等式可知，若有一点 y_0 使命题中极限存在，设为 μ，则对任意 y，极限都存在，且为 μ.

(2) 以 m_k 表示使以下不等式成立之整数

$$m_k \leqslant a_k(0) < m_k + 1,$$

于是，对任意 y

$$|a_k(y) - m_k| < 2,$$

从而

$$\left|\frac{a_k(y)}{k} - \frac{m_k}{k}\right| < \frac{2}{k}.$$

所以 $\frac{a_k(y)}{k}$ 属于区间 $\sigma_k=\left[\frac{m_k-2}{k}, \frac{m_k+2}{k}\right]$. 注意区间 σ_k 长度为 $\frac{4}{k}$, 当 $k\to\infty$时,趋于零.

(3) 因为 $\frac{a_{kl}(y)}{kl}$ 是以下 l 个数:

$$\frac{a_k(A^{ki}y)}{k}, \quad i=0,\cdots,l-1$$

的算术平均值,而对任意 y, $\frac{a_k(y)}{k}$ 在 σ_k 中,所以 $\frac{a_{kl}(y)}{kl}$ 也在区间 σ_k 之中. 类似地, $\frac{a_{kl}(y)}{kl}$ 在 σ_l 之中. 于是区间 σ_k 与 σ_l 相交.

(4) 由(2)与(3),序列 $\frac{a_k(y)}{k}$ 极限存在. 由(1)知极限与 y 无关. ▮

定义 对于保定向微分同胚 $A: T^1\to T^1$, 称以下数值 μ

$$\mu=\lim_{k\to\infty}\frac{a(y)+\cdots+a(A^{k-1}y)}{k} \pmod 1$$

为其**旋转数**,上式中 A 是 $A: T^1\to T^1$ 的一个开拓.

例 3 例 1 中的保定向微分同胚——旋转 $A: T^1\to T^1$ 的角函数 $a(y)=\theta$, 所以旋转数 $\mu=\theta \pmod 1$. 从而例 1 已经给出了旋转数 μ 为有理数与无理数的例子.

定理 3.2 若 T^1 上保定向微分同胚 A 的开拓 A 的旋转数为有理数 $\frac{p}{q}$ (p,q 互素, $q>0$), 则 $\exists y_0\in[0,1]$, 使

$$A^q(y_0)=y_0+p,$$

从而 A 有周期点.

证明 若对 $\forall y\in[0,1]$ 有 $a_q(y)>p$, 则因为 a_q 是 y 的连续 1-周期函数,故 $\exists\beta>0$, 使得对一切 $y\in[0,1]$, 从而使得对

$\forall y \in \boldsymbol{R}$ 有

$$a_q(y) > p + \beta,$$

即有

$$A^q(y) > y + p + \beta.$$

递推可得

$$A^{kq}(y) > y + k(p + \beta).$$

于是有

$$a_{kq}(y) > k(p + \beta),$$

从而

$$\frac{a_{kq}(y)}{kq} > \frac{p + \beta}{q}, \quad \mu > \frac{p}{q}.$$

这与原设矛盾.

同理可得,对 $\forall y \in [0, 1]$, $a_q(y) < p$ 亦不可能.

总之, $\exists y_0 \in [0, 1]$, 使 $a_q(y_0) = p$, 即 y_0 是 A 的周期点. ▮

下面给出定理的逆命题,但更为细致.

定理 3.3 T^1 上保定向微分同胚 A 有 q 周期点(q 为正整数) $\Rightarrow A$ 的旋转数 $\mu =$ 有理数 $\frac{p}{q}(\mathrm{mod}1)$, p 与 q 互素.

证明 设 y_0 是 A 的 q 周期点 $\Longrightarrow$ 对开拓 A,存在某个整数 p 使 $A^q(y_0) - y_0 = p \Longrightarrow$ 对 $\forall n \in \boldsymbol{N}$ (自然数), $A^{nq}(y_0) = y_0 + np$, 于是

$$\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{A^{nq}(y_0) - y_0}{nq} = \frac{p}{q}(\mathrm{mod}1).$$

如果 p, q 不互素 $\Longrightarrow \exists k \in \boldsymbol{N}$, $q_1 \in \boldsymbol{N}$, $p_1 \in \boldsymbol{Z}$, 使

$$p = kp_1, \quad q = kq_1.$$

因 q 是周期, $q_1 < q$, 所以 $A^{q_1}(y_0) - y_0 \notin \boldsymbol{Z}$, 从而 $\exists M \in \boldsymbol{Z}$, 使

$$M < A^{q_1}(y_0) - y_0 < M + 1,$$

即

$$y_0 + M < A^{q_1}(y_0) < y_0 + M + 1.$$

因为 A^{q_1} 严格单调，又

$$A^{q_1}(y+k)=A^{q_1}(y)+k,$$

由上式得

$$A^{q_1}(y_0)+M<A^{2q_1}(y_0)<A^{q_1}(y_0)+M+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{(k-1)q_1}(y_0)+M<A^{kq_1}(y_0)<A^{(k-1)q_1}(y_0)+M+1,$$

将以上 k 个不等式相加，得

$$y_0+kM<A^{kq_1}(y_0)<y_0+k(M+1).$$

注意

$$\frac{A^{kq_1}(y_0)-y_0}{k}=\frac{p}{k}=p_1,$$

由上面的不等式就得到

$$M<p_1<M+1,$$

与 $p_1\in Z$ 矛盾. ▮

推论 (1) T^1 上保定向微分同胚有周期点 $\Longleftrightarrow$ 其旋转数 μ 为有理数.

(2) T^1 上保定向微分同胚 A 若有周期点 $\left(\mu=\frac{p}{q},\ p, q \text{ 互素}\right)\Longrightarrow$ 其一切周期点有相同的周期 q.

(3) 若保定向微分同胚 A 的开拓 A 的旋转数为

$$\mu=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k(y)}{k}=\frac{p}{q},$$

则对 A 的任一周期点 y(q 周期)有

$$A^q y=y+p.$$

证明 (1) 由定理 3.2, 3.3 得到.

(2) 若不成立则与定理 3.3 矛盾.

(3) 设 y 是 A 的 q 周期点 $\Longrightarrow \exists m\in Z$, 使 $A^q y=y+m$, 因此

$$A^{2q}y=A^q(y+m)=A^q(y)+m=y+2m,$$

从而

$$A^{kq}y = y + km,$$

所以

$$\frac{a_{kq}(y)}{kq} = \frac{m}{q}, \quad m = p. \blacksquare$$

定义 微分同胚 $A: T^1 \to T^1$ 的 q 周期点 y 的轨道$\{y, Ay, \cdots, A^{q-1}y\}$ 称为 q **阶环**. 如果 A^q 在 y 处的导数的绝对值

$$|A^{q\prime}(y)| \neq 1,$$

则称此 q 阶环为**非退化的**,或称 q **周期点** y **为双曲的**. 并且,当

$$|A^{q\prime}(y)| < 1(>1)$$

时,称此**环为稳定的(不稳定的)**.

注: 由导数的锁链法则计算得 A^q 在点 $A^iy(i=0,\cdots,q-1)$ 处的导数全都相等,从而以上定义是合理的.

例 4 T^1 上的旋转 A: $A[x] = [x + \theta]$, 当 θ 为有理数 $\frac{p}{q}$ 时,一切轨道都是 q 阶环,但全是退化的. 或者说,它的一切周期点都不是双曲的.

定义 称圆周上的微分同胚 A: $T^1 \to T^1$ 是一个 Morse-Smale **微分同胚**,如果 A 满足:

(1) $\Omega(A)$ 由有限个点组成 (从而 $\Omega(A) = P(A)$);

(2) A 的一切周期点都是双曲的.

注: $\Omega(A)$ 由有限个点组成 $\Longrightarrow \Omega(A) \subset P(A)$.

证 任取 $y_0 \in \Omega(A)$, 因为 $\Omega(A)$ 是 A 的不变集,所以

$$A^k y_0 \in \Omega(A), \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

因 $\Omega(A)$ 中只有有限个点,所以 $\exists m, n \in \mathbf{Z}$, $m > n$, 使

$$A^m y_0 = A^n y_0 \Longrightarrow A^{m-n} y_0 = y_0,$$

即 $y_0 \in P(A)$.

例 5 旋转 A: $T^1 \to T^1$ 无论其旋转角 θ 是有理数或无理数,

都不是 Morse-Smale 微分同胚。

定理 3.4 T^1 上保定向的 Morse-Smale 微分同胚是结构稳定的。

先证明两个引理。

引理 1 对于 T^1 上保定向微分同胚 A 的开拓 A，旋转数 $\mu>\frac{n}{m}\left(<\frac{n}{m}\right)$ 等价于对一切 $y\in[0,1]$，

$$a_m(y)>n\ (a_m(y)<n).$$

证明 下面证括号外的命题。

$\Longrightarrow$：若 $\exists y_0\in[0,1]$，使 $a_m(y_0)\leqslant n$，即 $A^m y_0\leqslant y_0+n$，从而递推得

$$A^{km}y_0\leqslant y_0+kn.$$

于是

$$\frac{a_{km}(y_0)}{km}=\frac{A^{km}(y_0)-y_0}{km}\leqslant\frac{n}{m}.$$

所以 $\mu\leqslant\frac{n}{m}$，这与 $\mu>\frac{n}{m}$ 矛盾。

$\Longleftarrow$：因为在闭区间$[0,1]$上 $a_m(y)>n$，故 $\exists\varepsilon>0$，使

$$a_m(y)\geqslant n+\varepsilon,\quad \forall y\in[0,1].$$

因 $a_m(y)$ 为周期函数，故

$$a_m(y)\geqslant n+\varepsilon,\quad \forall y\in(-\infty,\infty),$$

即对 $\forall y\in\boldsymbol{R}$，有

$$A^m y\geqslant y+n+\varepsilon.$$

重复应用此不等式得

$$A^{km}y-y\geqslant k(n+\varepsilon),\quad k=1,2,\cdots.$$

所以

$$\frac{a_{km}(y)}{km}\geqslant\frac{n+\varepsilon}{m},$$

从而

$$\mu \geqslant \frac{n+\varepsilon}{m}, \quad \mu > \frac{n}{m}. \blacksquare$$

推论 若 T^1 上保定向微分同胚 A 的旋转数 $\mu = \frac{p}{q}(\mathrm{mod}1)$，则 A 的任一 q 阶环 $\{y, Ay, \cdots, A^{q-1}y\}$ 中的点在 T^1 上的顺序与旋转 A: $[y] \to \left[y+\frac{p}{q}\right]$ 的任一轨道上的点在 T^1 上的顺序一样。

引理 2 (Sternberg) 设同胚 $F, G: [0,1] \to [0,1]$ 以 $\{0, 1\}$ 为不动点，严格递增，且对 $\forall x \in (0, 1)$，

$$F(x) > x,\ G(x) > x\ (F(x) < x,\ G(x) < x),$$

则 F 与 G 拓扑共轭。

证明 若一同胚 H: $[0,1] \to [0,1]$ 满足

$$H \circ F = G \circ H,$$

则其图像集合

$$\{(x, Hx) | x \in [0,1]\} \subset [0,1] \times [0,1]$$

在 (F, G) 作用下不变，即

$$(F,G)(x,Hx) \equiv (Fx,\ GHx) = (Fx,\ HFx) = (x', Hx').$$

反之，任一同胚 $H:[0, 1] \to [0, 1]$ 的图像集在 (F, G) 作用下不变，则 H 满足 $H \circ F = G \circ H$。我们应用这一性质来构造 H。

任取 $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$，用 (F, G) 逐次作用得一点列

$$(x_k,\ y_k) \equiv (F,\ G)^k (x_0,\ y_0) \equiv (F^k x_0,\ G^k y_0),$$

$$k = 0,\ \pm 1, \cdots.$$

由假设知，$F^k x_0$, $G^k y_0$ 对 k 单调递增，且 $k \to +\infty$ 时，

$$F^k x_0,\ G^k y_0 \nearrow 1;$$

$k \to -\infty$ 时，

$$F^k x_0,\ G^k y_0 \searrow 0.$$

因为若 $F^k x_0 \to a$，则由 $x_{k+1} = F x_k$ 得 $a = Fa$，所以 $a = 0$ 或 1。

任取一严格递增连续曲线连接 (x_0, y_0) 与 $(x_1, y_1) = (Fx_0, Gy_0)$，以这一段曲线作为函数 $H = h$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的图像。然后按照在 (F, G) 作用下图像不变的性质在

$$[x_k, x_{k+1}], \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

上定义 H，即当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时，令

$$Hx = G^k \circ h \circ F^{-k} x, \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots;$$

又令 $H(0) = 0$，$H(1) = 1$．不难检验，如此定义的 H 是 $[0, 1] \to [0,1]$ 上的同胚，又满足当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $(F(x) \in [x_{k+1}, x_{k+2}])$，$k = 0, \pm 1, \cdots$ 时，

$$GHx = GG^k hF^{-k} x = G^{k+1} hF^{-(k+1)} Fx = HFx. \blacksquare$$

推论 若同胚

$$F: [a,b] \to [a,b], \quad G: [c,d] \to [c,d]$$

是严格递增的，它们的不动点集分别为

$$\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_m = b\} \text{ 与 } \{y_0 = c, y_1, \cdots, y_m = d\},$$

又当 $x \in (x_k, x_{k+1})$，$y \in (y_k, y_{k+1})$ $(k = 0, \cdots, m-1)$ 时，有

$$F(x) > x, \quad G(y) > y$$

或

$$F(x) < x, \quad G(y) < y,$$

则 F 与 G 拓扑共轭。

定理 3.4 的证明 设 A 是 T^1 上保定向的 Morse-Smale 微分同胚，由 Morse-Smale 微分同胚的条件(1)知，对开拓 A，$\mu(A) = \frac{p}{q}$ (p，q 互素)。于是

$$\frac{p-1}{q} < \mu(A) < \frac{p+1}{q}.$$

由引理 1，对 $\forall y \in [0,1]$，

$$p - 1 < a_q(y) = A^q(y) - y < p + 1.$$

再由条件(1)与(2)知，函数

$$F(y) = A^q(y) - y - p$$

在 $y\in[0,1]$ 上有有限个简单零点.

取A在 $\mathrm{Diff}^1(T^1)$ 中的邻域U，使当B保定向，$B\in U$时有

(i) 对 $\forall y\in[0,1]$,

$$p-1<b_q(y)\equiv B^q(y)-y<p+1;$$

(ii) 函数

$$G(y)\equiv B^q(y)-y-p$$

在 $F(y)$的每一个简单零点的附近存在唯一一个简单零点，且在相应的零点处，导数同号.

我们来证明 $\mu(B)=\mu(A)$. 因为B的一切周期点有相同的周期，设此周期为q'，显然 $q'\cdot k=q$，对某正整数k. 设

$$\mu(B)=\frac{p'}{q'}(p',q'\text{ 互素}).$$

由(i)与引理1知

$$\frac{p-1}{q}<\mu(B)<\frac{p+1}{q},$$

所以

$$\frac{p-1}{q}<\frac{p'}{q'}<\frac{p+1}{q}\Longrightarrow-\frac{1}{q}<\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}<\frac{1}{q}$$

$$\Longrightarrow\frac{-1}{kq'}<\frac{kp'-p}{kq'}<\frac{1}{kq'}.$$

于是$-1<kp'-p\quad 1$，从而 $kp'=p$. 因p,q互素，所以 $k=1$，即 $\mu(B)=\mu(A)$.

总之，B与A有同样多个非退化的q阶环，稳定与不稳定的相间，且环中之点在T^1上的顺序也是完全一样的.

取A^q的一个不动点a，设A的q阶环$\{a,Aa,\cdots,A^{q-1}a\}$中按T^1上逆时针顺序与a相邻的大于a的点为A^ia $(1\leqslant i\leqslant q-1)$. 显然，将区间$[a,A^ia]$用$A$作用$q$次恰覆盖$T^1$一次(环上的点覆盖两次). 如果这个环是稳定的(不稳定的)，则取B的一个稳定环(不稳定环)$\{b,Bb,\cdots,B^{q-1}b\}$，将这两个环上的点依次对

应起来。显然与 b 相邻而大于 b 的点是 B^ib，并且区间 $[b,B^ib]$ 在 B 的 q 次作用下覆盖 T^1（见图 3.2）。

当然 $[a, A^ia]$ 或 $[b, B^ib]$ 之中都还有 A^q，B^q 的不动点，（至少有一个，至多有限个，且是奇数个），但两区间中不动点的个数相同。我们依次将它们对应起来（它们依次属于不稳定环，稳定环，…），再将它们所在的环上的点对应起来。至此得到了 A 与 B 的全部周期点之间的一个对应。

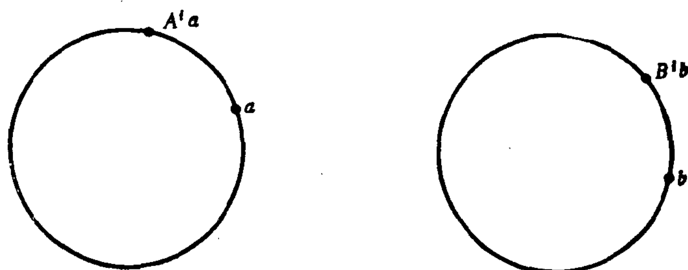


图 3.2

显然保定向微分同胚 A^q 将区间 $[a, A^ia]$ 映为自身，B^q 将 $[b, B^ib]$ 映为自身，它们之中的不动点也一一对应，且在对应的不动点之间或同时

$$A^qy > y, \quad B^qy > y;$$

或同时

$$A^qy < y, \quad B^qy < y.$$

由引理 2 的推论，A^q 与 B^q 拓扑共轭，即 $\exists$ 同胚 h: $[a,A^ia] \to [b, B^ib]$，使

$$B^q \circ h = h \circ A^q$$

成立。

下面我们借助于上述同胚 h 来定义出一个 $T^1 \to T^1$ 的同胚 H，使关系式

$$B\circ H = H\circ A$$

成立，即 A 与 B 拓扑共轭. 为此令

$$H = \begin{cases} h, & 当 \ y\in[a, A^i a]; \\ B\circ h\circ A^{-1}, & 当 \ y\in[Aa, A^{i+1} \\ \cdots & \\ B^{q-1}\circ h\circ A^{-(q-1)}, & 当 \ y\in[A^{q-1}a, A^{i+q-1}a]. \end{cases}$$

如此定义的 H 是 $T^1\to T^1$ 上的同胚，因为对于点 $A^j a(j=0,\cdots,q-1)$，无论它属于 $[A^j a, A^{i+j}a]$ 或 $[A^{j-i}a, A^j a]$ 都有

$$H(A^j a) = B^j b.$$

H 还使所要求的关系式成立，因为当 $y\in[A^j a, A^{i+j}a]$ 时，

$$Ay\in[A^{j+1}a, A^{i+j+1}a],$$

于是

$$\begin{aligned}(H\circ A)y &= H(Ay) = B^{j+1}\circ h\circ A^{-(j+1)}(Ay) \\ &= B^{j+1}\circ h(A^{-j}y),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(B\circ H)y &= B(Hy) = B(B^j\circ h\circ A^{-j}y) \\ &= B^{j+1}\circ h(A^{-j}y),\end{aligned}$$

所以在 T^1 上确有 $B\circ H = H\circ A$ 成立. ▮

§3.3 环面 T^2 上的微分方程的结构稳定性

本节研究环面 T^2 上的微分方程:

$$\begin{cases}\dot{x} = \omega_1(x, y), \\ \dot{y} = \omega_2(x, y),\end{cases} \qquad (x, y)\in T^2.$$

当 $\omega_1, \omega_2\in C^1$，$\omega_1\neq 0$ 时，R^2 上的双 1-周期微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y), \quad \lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{1}$$

由于 λ 有界、连续，对 y 有连续偏导数，所以一切解可以开拓到 $(-\infty, \infty)$.

以 $\varphi_y(x)=\varphi(x,y)$ 表示方程(1)过点 $(0,y)$ 的解. 此解曲线的平均斜率为

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_0^X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_y(x)\mathrm{d}x=\lim_{X\to\infty}\frac{\varphi(X,y)-\varphi(0,y)}{X}$$

$$=\lim_{X\to\infty}\frac{\varphi(X,y)-y}{X}.$$

取 X 为离散值 $k\in\boldsymbol{Z}$, 又令 $Ay=\varphi(1,y)$, 则以上极限就成为

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(k,y)-y}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{A^ky-y}{k},$$

这是保定向微分同胚 A 的开拓 A 的旋转数.

由于 $\lambda(x,y)$ 有周期性,所以显然 $\varphi(x,y)$ 有性质:

$$\varphi(x,y+k)=\varphi(x,y)+k,\quad \forall x,y\in\boldsymbol{R},k\in\boldsymbol{Z}.$$

命题 3.5 对任意 y, 极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x,y)-y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_y(x)}{x}$$

存在,且与 y 无关.

证明 由 $\varphi(x,y)$ 的周期性,只需证明对 $\forall y\in[0,1]$ 结论成立即可.

由上节知, $\exists\mu\in\boldsymbol{R}$, 使对 $\forall y\in[0,1]$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi_y(k)-y}{k}=\mu.$$

下面来证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_y(x)}{x}=\mu$, 对 $\forall y\in[0,1]$ 成立.

首先将 x 表为 $x=k+x'$, 其中 $k=[x]$, $0\leqslant x'<1$, 因为

$$\varphi_0(x)-\varphi_0(k)=\int_k^x\lambda(x,\varphi_0(x))\mathrm{d}x,$$

而 $|\lambda(x,y)|\leqslant M$, 所以

$$\left|\frac{\varphi_0(x)}{x}-\frac{\varphi_0(k)}{x}\right|\leqslant\frac{M}{|x|}.$$

又有

$$\left|\frac{\varphi_0(k)}{k}-\frac{\varphi_0(k)}{x}\right|=\left|\frac{\varphi_0(k)}{k}\right|\left|1-\frac{k}{x}\right|$$

$$=\left|\frac{\varphi_0(k)}{k}\right|\left|\frac{x'}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}\left|\frac{\varphi_0(k)}{k}\right|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，$\exists X$ 使当 $x>X$（从而 $k\geqslant[X]$）时，

$$\frac{M}{|x|}<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\frac{\varphi_0(k)}{k}-\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\frac{1}{|x|}\left|\frac{\varphi_0(k)}{k}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\left|\frac{\varphi_0(x)}{x}-\mu\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_0(x)}{x}=\mu.$$

对于 $\forall y\in[0,1]$，解 $\varphi_y(x)$ 满足

$$\varphi_0(x)\leqslant\varphi_y(x)\leqslant\varphi_1(x)=\varphi_0(x)+1.$$

于是，对 $\forall y\in[0,1]$，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_y(x)}{x}=\mu. \quad \blacksquare$$

定义 称 $\mu=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_y(x)}{x}$ 为方程(1)的**旋转数**，其中 $\varphi_y(x)$ 是方程(1)过$(0,y)$的解。

例 1 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\lambda$（λ 为常数)的旋转数 $\mu=\lambda$。

对环面 T^2 上的微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\omega_1(x,y),\\ \dot{y}=\omega_2(x,y),\end{cases}\tag{1}$$

如上节例 2 中那样导出它在 T^1 上的 Poincaré 映射 A，则显然方

程(1)的旋转数就是此保定向微分同胚 A 的旋转数. 又显然方程(1)在 T^2 上有闭轨线时, A 在 T^1 上有周期点;反之, A 有周期点时方程(1)在 T^2 上有闭轨线. 如果方程(1)过$(0, y)$的解曲线 $\varphi_y(x)$ 为 T^2 上的闭轨, 则 $\exists p,q\in \boldsymbol{Z}(p, q$ 互素, $q>0)$ 使 $\varphi_y(q)-y=p$. 我们称此环面 T^2 上的闭曲线在**子午线方向 q 转**, 在**平行方向 p 转**后封闭.

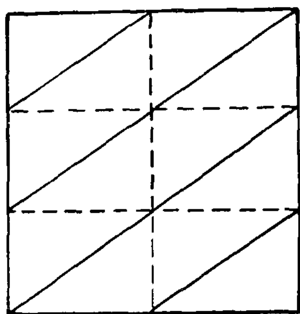


图 3.3

例 2 方程 $\frac{dy}{dx}=\lambda$, 当 λ 为有理数 $\frac{p}{q}$ $(q>0, p, q$ 互素$)$ 时, 每一轨道在 T^2 上子午线方向 q 转, 平行方向 p 转后封闭 $\left(图 3.3 中 \frac{p}{q}=\frac{2}{3}\right)$; 当 λ 为无理数时, 每一轨道在 T^2 上稠, 因为它的轨道为 $\boldsymbol{R}^2$ 上的直线, 它的 Poincaré 映射为 T^1 上的旋转 $A:[y]\to[y+\lambda]$, A 的每一轨道在 T^1 上稠.

类似于上一节有:

定理 3.6 方程(1)的旋转数为有理数 $\frac{p}{q}$ $(q>0, p, q$ 互素$)\Longleftrightarrow$ 方程(1)在 T^2 上有闭轨沿子午线方向 q 转, 平行方向 p 转后封闭.

推论 (i) 方程(1)的旋转数为有理数 $\Longleftrightarrow$ 方程(1)有解在 T^2 上是闭曲线.

(ii) 旋转数 $=\frac{p}{q}$ $(q>0, p, q$ 互素$)\Longrightarrow$ 方程(1)在 T^2 上的一切闭轨都是子午线方向 q 转,平行方向 p 转后封闭.

(iii) 旋转数 $=\frac{p}{q}$ 时, (1)的一切在 T^2 上的闭轨线与子午线的 q 个交点在 T^1 上的次序都与 T^1 上的旋转 $[y]\to\left[y+\frac{p}{q}\right]$ 相

同.

定义 设方程(1)的解 $\varphi(x,y_0)$ 满足 $\varphi(q,y_0)=y_0+p$，即在 T^2 上是闭轨线，子午线方向 q 转，平行方向 p 转后封闭. 如果

$$\frac{d}{dy}\varphi(q,y_0)\neq 1,$$

则称此**闭轨线是非退化的**，或称之为**双曲的**.

例3 方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{p}{q}$ $(q>0,\ p,q$ 互素)在 T^2 上的闭轨线全是退化的或说是非双曲的.

定理 3.7 若环面 T^2 上的微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\omega_1(x,y),\\ \dot{y}=\omega_2(x,y),\end{cases}\qquad \omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\in C^1(T^2),\ \omega_1\neq 0$$

在 T^2 上有有限条闭曲线，且都是非退化的(双曲的)，则系统结构稳定.

证明 由设方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega_2(x,y)}{\omega_1(x,y)}=\lambda(x,y)$$

在 T^2 上有闭轨，所以旋转数 μ 为有理数: $\mu=\dfrac{p}{q}$ $(q>0,p,q$ 互素)，从而函数

$$F(y)=\varphi(q,y)-y-p$$

有零点. 再由假设，零点个数有限，且都是简单零点.

考虑扰动方程

$$\frac{dy}{dx}=\lambda(x,y)+\xi(x,y),$$

其中 $\xi(x,y)$ 也是双1-周期的. 因为，对任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对 $\forall x\in[0,1]$，$y\in[0,1]$，都有 $|\xi|,|\xi'_x|,|\xi'_y|<\delta$ 时，扰动方程的解 $\psi(x,y)$ 满足

$$|\psi(x,y)-\varphi(x,y)|<\varepsilon,\quad |\psi'_y(x,y)-\varphi'_y(x,y)|<\varepsilon,$$

对 $\forall x\in[0,q]$，$y\in[0,1]$(参见[7]). 于是对充分小的 $\delta>0$，

当 $|\xi|$, $|\xi'_x|$, $|\xi'_y| < \delta$ 时,函数

$$G(y) = \psi(q, y) - y - p$$

恰在 $F(y)$ 的每一个简单零点 $\bar{y}$ 近傍有一个简单零点 $\bar{\bar{y}}$, 且 $F'(\bar{y})$ 与 $G'(\bar{\bar{y}})$ 同号. 显然扰动方程的旋转数也等于 $\frac{p}{q}$.

因为 $\omega_1 \neq 0$, 无妨设 $\omega_1 > 0$ 即 $\frac{dx}{dt} > 0$, 从而扰动方程也有 $\frac{dx}{dt} > 0$。这样一来,为了证明原方程与扰动方程的流拓扑等价,就只要证明存在同胚 $\bar{H}: T^2 \to T^2$, 将轨线 $\varphi(x, y)$ 对应到轨线 $\psi(x, y)$, 且 x 增加的方向对应到 x 增加的方向。

为此我们令 $A: T^1 \to T^1$ 为 $Ay = \varphi(1, y)$; $B: T^1 \to T^1$ 为 $By = \psi(1, y)$. A, B 满足定理 3.4 中的条件。从而 $\exists H$: $T^1 \to T^1$, 使 $B \circ H = H \circ A$. 下面应用 H 来构造 $\bar{H}: T^2 \to T^2$.

对于 T^2 上任一点 a, $\exists y_a \in T^1$, 使方程(1)的轨道 $\varphi(x, y_a)$ 在 $x = x_a (0 \leqslant x_a \leqslant 1)$ 时过点 a, 即 $a = (x_a, \varphi(x_a, y_a))$. 取扰动方程的轨线 $\psi(x, H(y_a))$, 令点 a 与此轨线上横坐标 $x = x_a$ 的点对应,即令 $\bar{H}a = (x_a, \psi(x_a, H(y_a))$. 不难看出,如此定义的 $\bar{H}$ 是 T^2 上的同胚.

在 $\bar{H}$ 的映射之下, $\varphi(x, y_a)$ 的一段

$$(x, \varphi(x, y_a)), \quad x: 0 \to 1$$

对应到 $\psi(x, H(y_a))$ 的一段

$$(x, \psi(x, H(y_a))), \quad x: 0 \to 1.$$

而 $\varphi(x, y_a)$ 接下去的一段为

$$(x, \varphi(x, \varphi(1, y_a))) = (x, \varphi(x, Ay_a)), \quad x: 0 \to 1,$$

它在 $\bar{H}$ 之下的像是

$$(x, \psi(x, HAy_a)), \quad x: 0 \to 1.$$

这正是 $\psi(x, Hy_a)$ 接下去的一段

$$(x, \psi(x, \psi(1, Hy_a))) = (x, \psi(x, BHy_a))$$
$$= (x, \psi(x, HAy_a)), \quad x: 0 \to 1,$$

如此继续，轨线 $\varphi(x,y_a)$ 对应到轨线 $\psi(x,H(y_a))$，且 x 增加的方向对应到 x 增加的方向. 见图3.4. ∎

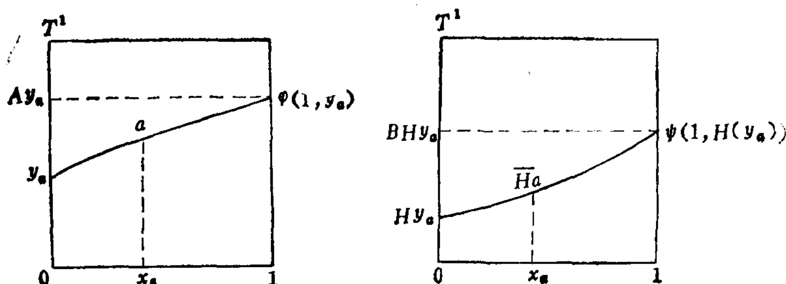


图 3.4

§3.4 环面 T^2 上的双曲线性自同构的结构稳定性

本节研究环面上的一个具体的双曲线性自同构.

考虑 $\boldsymbol{R}^2$ 上的线性变换 $\hat{A}$，其矩阵为

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

由第二章 §2.1 例 5，它导出环面 T^2 上的一个双曲线性自同构 A.

在证明此微分同胚 A 是结构稳定的之前，先列举它的一些性质:

(1) A 有稠的周期点集 P;

(2) $\Omega(A)=T^2$;

(3) A 有可数个环;

(4) A 是**按测度混合的**，即，对 T^2 上任意区域 F 与 G 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(A^nF\cap G)}{\operatorname{mes}F}=\frac{\operatorname{mes}G}{\operatorname{mes}T^2}.$$

上述四个性质的前三个都是命题 2.1 的推论. 性质 4 中所说的按测度混合性显然强于拓扑混合. 在证明性质 4 之前先作一些

分析. 矩阵 $\hat{A}$ 以 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1$ 与 $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ 为特征值,取相应的特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ \omega_1\end{pmatrix},\quad \omega_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ \omega_2\end{pmatrix},\quad \omega_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

显然 $\xi_1\perp\xi_2$. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上任一平行于 $\xi_1(\xi_2)$ 的直线

$$\eta=\eta_0+t\xi_1(\eta=\eta_0+t\xi_2),\quad t\in\boldsymbol{R}$$

经过 $\hat{A}$ 映射为

$$\hat{A}\eta=\hat{A}\eta_0+t\lambda_1\xi_1\ (\hat{A}\eta=\hat{A}\eta_0+t\lambda_2\xi_2),\quad t\in\boldsymbol{R},$$

仍是一平行于 $\xi_1(\xi_2)$ 的直线. 由于 $\omega_1(\omega_2)$ 是无理数,每一此种直线上的点在 T^2 上是一稠集. 又由于任一平行于 $\xi_1(\xi_2)$ 的直线段经 $\hat{A}$ 映射所得的直线段其长度为原直线段长的 $\lambda_1(\lambda_1>1)(\lambda_2, 0<\lambda_2<1)$ 倍, 所以 T^2 上任一区域 F 在 A^n 作用下的像 A^nF, 当 n 增加时,沿 ξ_1 的方向逐次增长为其 λ_1 倍, 同时沿 ξ_2 的方向逐次收缩为其 λ_2 倍,而成为一个包含着充分长的一段平行于 ξ_1 的直线的狭长条. 由于平行 ξ_1 的直线在 T^2 上均匀分布, 在 T^2 上稠, 所以, n 趋于无穷时, A^nF 也趋于均匀分布.

性质 4 的证明 以 f, g 分别表示区域 F, G 的特征函数, 则定理所要证明的等式化为

$$\lim_{n\to\infty}(A^{n*}f,\ g)=(f,\ 1)(1,\ g),$$

其中

$$(u,\ v)=\int_{T^2}u(x)\bar{v}(x)\mathrm{d}x,\ (A^{n*}f)(x)=f(A^{-n}x).$$

先对 f 与 g 都是指数函数证明以上等式. 设

$$f(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(k,x)},\quad g(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m,x)},$$

其中

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \quad k_i, m_i \in Z.$$

若 $k \neq 0$，显然 $(f, 1) = 0$，而

$$(A^{n*}f)(x) = e^{2\pi i(k, A^{-n}x)} = e^{2\pi i(A^{-n}k, x)},$$

所以

$$(A^{n*}f, g) = \int e^{2\pi i(A^{-n}k - m, x)} dx.$$

对充分大的 n，$A^{-n}k - m$ 恒不为零. 这是因为，记 $k = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$，因 $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \neq 0$，$k_1, k_2 \in \boldsymbol{Z}$，$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$，$\omega_1, \omega_2$ 为无理数，所以 $a_1 \neq 0$，$a_2 \neq 0$，从而

$$A^{-n}k = a_1 A^{-n}\xi_1 + a_2 A^{-n}\xi_2 = a_1 \frac{1}{\lambda_1^n}\xi_1 + a_2 \frac{1}{\lambda_2^n}\xi_2,$$

$|A^{-n}k| \to \infty$，当 $n \to +\infty$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(A^{n*}f, g) = 0$. 上式成立. 若 $k = 0$，即 $f(x) \equiv 1$，于是 $(A^{n*}f)(x) \equiv 1$. 上式显然成立.

对任意 f, g，设 $f_i, g_i (i = 1, 2, \cdots)$ 为指数函数之和，当 $i \to \infty$ 时，

$$\|f_i - f\| \to 0, \quad \|g_i - g\| \to 0.$$

因为

$$\begin{aligned}
&|(A^{n*}f, g) - (f, 1)(1, g)| \\
&\quad \leqslant |(A^{n*}f_i, g_i) - (f_i, 1)(1, g_i)| + |(A^{n*}f, g - g_i)| \\
&\qquad + |(A^{n*}f - A^{n*}f_i, g_i)| + |(f_i, 1)||(1, g_i - g)| \\
&\qquad + |(1, g)||(f_i - f, 1)| \\
&\quad \leqslant |(A^{n*}f_i, g_i) - (f_i, 1)(1, g_i)| \\
&\qquad + \|A^{n*}f\|\|g - g_i\| + \|g_i\|\|A^{n*}f - A^{n*}f_i\| \\
&\qquad + \|f_i\|\|g - g_i\| + \|g\|\|f_i - f\|,
\end{aligned}$$

注意，不等式右端第二项中

$$\|A^{n*}f\| = \|f\|;$$

第三项中

$$\|A^{n*}f - A^{n*}f_i\| = \|f - f_i\|,$$

所以 $n\to\infty$ 时,右端→0. 从而有

$$\lim_{n\to\infty}(A^{n*}f, g) = (f, 1)(1, g). \quad \blacksquare$$

定理 3.8 由矩阵 $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 导出的环面 T^2 上的双曲线性自同构 A 在 C^1 拓扑下是结构稳定的.

证明 (1) 定理要证明存在一个同胚 H: $T^2\to T^2$, 使等式 $B\circ H = H\circ A$ 成立,其中 B 是任意 C^1 拓扑下与 A 充分接近之微分同胚. 我们分别将 H 与 B 表为

$$H(x) = x + h(x), \quad B(x) = A(x) + f(x),$$

其中 $h(x)\in C^0(T^2)$, $f(x)\in C^1(T^2)$ 都是双1-周期函数. 于是上等式成立当且仅当

$$(A + f)\circ(I + h) = (I + h)\circ A,$$

即

$$f(x + h(x)) = h(Ax) - Ah(x)$$

成立. 所以我们只要证,当微分同胚 f 充分小时以上方程有解 h.

(2) 先考虑一个简化了的方程

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x).$$

这个方程称作**同调方程**. 将方程左端 $h\circ A - A\circ h$ 记作 Lh. 显然, L 是 $C^0(T^2)$ 上的线性算子. 同调方程 $Lh = f$ 有解的充要条件是算子 L 有逆.

(3) 证明算子 L 有逆,得同调方程有解.

A 的两个特征值 $\lambda_1 > 0$, $0 < \lambda_2 < 1$, $\lambda_1\lambda_2 = 1$. 设 e_1 与 e_2 分别是对应于 λ_1 与 λ_2 的单位特征向量. 对 $\forall f\in C^0(T^2)$, 我们按 e_1, e_2 分解 f, 即令

$$f = f_1e_1 + f_2e_2,$$

其中 $f_1, f_2\in C^0(T^2, T^1)$. 分解唯一,所以 $C^0(T^2)$ 可以分解为子空间 E_1, E_2 的直和. 显然, E_1 与 E_2 是 L 不变的子空间. 分解

$$f = f_1e_1 + f_2e_2, \quad h = h_1e_1 + h_2e_2 \quad (f_i, h_i: T^2\to T^1),$$

同调方程成为以下形式

$$(h_1e_1 + h_2e_2)\circ A - A\circ(h_1e_1 + h_2e_2) = f_1e_1 + f_2e_2.$$

再按 E_1，E_2 分解为两个等价方程

$$\begin{cases} h_1(Ax) - \lambda_1 h_1(x) = f_1(x), \\ h_2(Ax) - \lambda_2 h_2(x) = f_2(x). \end{cases}$$

我们在 $C^0(T^2, T^1)$ 上定义一个算子 S 如下：S 将 $g \to g\circ A$，即

$$(Sg)(x) = g(Ax).$$

因为

$$\max_{x\in T^2} |g(Ax)| = \max_{x\in T^2} |g(x)|,$$

所以 $\|S\| = 1$，显然 S^{-1} 存在，$\|S^{-1}\| = 1$. 引用算子 S 将同调方程的两个等价方程化为算子方程

$$(S - \lambda_i E)h_i = f_i, \quad i = 1, 2.$$

因为 $\lambda_1 > 1$，所以 $\lambda_1 > \|S\|$，λ_1 是 S 的正则点. 于是

$$\|(S - \lambda_1 E)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda_1 - \|S\|} = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2}.$$

因为

$$S - \lambda_2 E = \lambda_2 S(\lambda_1 E - S^{-1}), \ \|S^{-1}\| = 1 < \lambda_1,$$

于是

$$\begin{aligned} \|(S - \lambda_2 E)^{-1}\| &\leqslant |\lambda_2^{-1}| \|S^{-1}\| \|(\lambda_1 E - S^{-1})^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_1 - \|S^{-1}\|} = \frac{1}{1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

因此线性算子 L 有逆(线性算子)，且 $\|L^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1 - \lambda_2}$，同调方程有解.

(4) 应用压缩映像原理证明原方程有解.

我们定义 $C^0(T^2)$ 上的算子 Φ 如下：

$$\Phi[h](x) = f(x + h(x)) - f(x),$$

从而原方程

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x + h(x))$$

化为算子方程

$$Lh = \Phi h + f.$$

因 L^{-1} 线性，所以

$$h = L^{-1}\Phi h + L^{-1}f.$$

下面先来证明算子 $L^{-1}\Phi$ 是空间 $C^0(T^2)$ 中的压缩映像。

因为 L^{-1} 线性，$\|L^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda_2}$，所以

$$\|L^{-1}\Phi h^1 - L^{-1}\Phi h^2\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda_2}\|\Phi h^1 - \Phi h^2\|.$$

而

$$\begin{aligned}\|\Phi h^1 - \Phi h^2\| &= \max_{x\in T^2}|f(x + h^1(x)) - f(x + h^2(x))| \\ &\leqslant \max_{x\in T^2}\|Df(x + \theta(h^1(x) - h^2(x)))\|\,|h^1(x) - h^2(x)| \\ &\leqslant \|f\|_{C^1}\|h^1 - h^2\|,\end{aligned}$$

所以当 $\|f\|_{C^1} < 1 - \lambda_2$ 时，$L^{-1}\Phi$ 是压缩映像．若令

$$Ph = L^{-1}\Phi h + L^{-1}f,$$

显然 P 也是压缩映像，有不动点 $h \in C^0(T^2)$. 此 h 就是原方程的解。

由 h 得到 $H: H(x) = x + h(x)$，$H \in C^0(T^2)$，使

$$B\circ H = H\circ A.$$

(5) 最后证明 H 是环面 T^2 上的同胚。

因 H 连续，T^2 紧，故只需证明 H 在 T^2 上是满映的，一对一的。

由于 $h(x)$ 的连续性与双 1-周期性，$H(x) = x + h(x)$，显然 H 是 T^2 上满映的。

设 x, y 使 $H(x) = H(y)$，到 $\boldsymbol{R}^2$ 上考虑就有

$$\hat{B}^n\hat{H}x = \hat{B}^n\hat{H}y,$$

从而 $\hat{H}\hat{A}^n x = \hat{H}\hat{A}^n y$. 因为 $\hat{H} = I + h$，就得到

$$\hat{A}^n(x - y) = h(\hat{A}^n y) - h(\hat{A}^n x).$$

若 $x \neq y$，由 $\hat{A}$ 的双曲性，当 $n \to +\infty$ 或 $n \to -\infty$ 必有 $\hat{A}^n(x - y) \to \infty$. 这与 h 的有界性矛盾. ∎

§3.5 Smale 马蹄定理及 Smale 马蹄的结构稳定性

1. Smale 马蹄定理，Hénon 映射

定义 对于常数 μ，$0 < \mu < 1$，称 $y = u(x)$ 的图像为 $Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中**水平曲线**，若当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$0 \leqslant u(x) \leqslant 1$，并且

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \mu |x_1 - x_2|,\quad 0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1.$$

如果有水平曲线 $y = u_1(x)$ 与 $y = u_2(x)$，满足关系式

$$0 \leqslant u_1(x) < u_2(x) \leqslant 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

则称点集合

$$U = \{(x,\ y) | 0 \leqslant x \leqslant 1,\ u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\}$$

为 Q 中**水平条**. **水平条** U **的直径** $d(U)$ 定义如下：

$$d(U) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} [u_2(x) - u_1(x)].$$

还可以类似地定义**铅直曲线** $x = v(y)$，**铅直条** V 与**铅直条** V **的直径** $d(V)$.

引理 1 若 $V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \cdots$ 是 Q 中一串前一个包含着后一个的铅直条，又有 $d(V^{(k)}) \to 0$，当 $k \to \infty$，则交集

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V^{(k)}$$

确定一铅直曲线.

证明 对每一个 y，$0 \leqslant y \leqslant 1$，应用区间套定理对应到一个值 $x(y)$，不难证明，如此确定出的曲线是一铅直曲线. ∎

引理 2 Q 中一铅直曲线 $x = v(y)$ 与一水平曲线 $y = u(x)$

存在唯一交点。

证明 (x, y) 是交点坐标的充要条件是：x 是方程

$$x = v(u(x))$$

的根；$y = u(x)$。

由水平曲线与铅直曲线的定义可得

$$|v(u(x_1)) - v(u(x_2))| \leqslant \mu |u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \mu^2 |x_1 - x_2|,$$

对一切 $x_1, x_2 \in [0, 1]$。由 $0 < \mu < 1$ 得 $0 < \mu^2 < 1$，所以

$$f(x) = v(u(x))$$

是压缩映像，有唯一不动点 $x_0 \in [0,1]$，即方程

$$x = v(u(x))$$

有唯一根 x_0。▌

根据引理 2，$Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中每一水平曲线 $y = u(x)$ 与一铅直曲线 $x = v(y)$ 交于 Q 中的一个点 (x, y)。我们令上述曲线对 (u, v) 对应到它们的交点 $z = (x, y)$，又定义点 z 的模如下：

$$|z| = |x| + |y|.$$

引理 3 设曲线对 (u_i, v_i) 对应到点 $z_i = (x_i, y_i)$，$i = 1, 2$，则有不等式

$$|z_1 - z_2| \leqslant (1 - \mu)^{-1}(\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|),$$

其中 $\|u\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |u(x)|$，$\|v\| = \max\limits_{y \in [0,1]} |v(y)|$。

证明 因 $x_i = v_i(y_i)$，所以

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |v_1(y_1) - v_2(y_2)| \\ &\leqslant |v_1(y_1) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_2(y_2)| \\ &\leqslant \mu |y_1 - y_2| + \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

类似地有

$$|y_1 - y_2| \leqslant \mu |x_1 - x_2| + \|u_1 - u_2\|.$$

将以上两个不等式相加，又因 $0 < \mu < 1$，就得到所要证明的不等式。▌

在叙述 Smale 马蹄定理之前，先描写同胚 φ。

设φ是方块 $Q=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 到 $\varphi(Q)\subset \mathbf{R}^2$ 的一个同胚，下面是关于φ的两个条件：

(i) 设集合P中元素的个数有限，对应于 $\forall a\in P$，有 U_a, V_a 是Q中的水平条与铅直条，U_a 互不交，V_a 互不相交。

$$\varphi(Q)\cap Q=\bigcup_{a\in P} U_a,$$

又映像φ将V_a同胚地映为U_a，即

$$\varphi(V_a)=U_a,\quad a\in P,$$

并且，V_a的铅直边界映为U_a的铅直边界；水平边界映为水平边界。见图 3.5 ($P=\{a, b\}$ 的情况)。

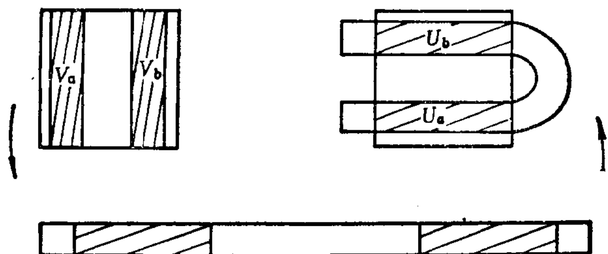


图 3.5

(ii) 若铅直条 $V\subset\bigcup_{a\in P} V_a$，则对任意 $a\in P$，

$$\varphi^{-1}(V)\cap V_a=\widetilde{V}_a$$

也是一个铅直条，其中

$$\varphi^{-1}(V)=\varphi^{-1}\left(V\cap\left(\bigcup_{a\in P} U_a\right)\right),$$

并且对某个常数 ν, $0<\nu<1$，有

$$d(\widetilde{V}_a)\leqslant \nu d(V).$$

类似的，若水平条 $U\subset\bigcup_{a\in P} U_a$，则对任意 $a\in P$，

$$\varphi(U)\cap U_a=\widetilde{U}_a$$

是一水平条，并且

$$d(\widetilde{U}_a) \leqslant \nu d(U).$$

定理 3.9 (Smale 马蹄定理) 若φ是 $Q \to \varphi(Q)$ 的一个同胚，满足上述条件 (i) 与 (ii)，则φ以$\Sigma(P)$上的移位自同构σ为其**子系统**，即存在Σ到Q的某子集Λ上的一个同胚τ使

$$\varphi \circ \tau = \tau \circ \sigma,$$

并且，Λ是φ的不变集，是Q的闭子集，是一个 Cantor 集。

证明 对于Σ中一个给定的序列

$$(s) = (\cdots, s_{-1}, s_0^*, s_1, \cdots).$$

考虑Q中与(s)相应的一个点集合

$$\{p \in Q \mid p \in \varphi^k(V_{s_k}),\ k = 0, \pm 1, \cdots\}.$$

先考虑集合

$$\begin{aligned} I_n &= \{p \in Q \mid p \in \varphi^k(V_{s_k}),\ (k = 0, -1, \cdots, -n)\} \\ &= V_{s_0} \cap \varphi^{-1}(V_{s_{-1}}) \cap \cdots \cap \varphi^{-n}(V_{s_{-n}}) \\ &= V_{s_0} \cap \varphi^{-1}(V_{s_{-1}} \cap \varphi^{-1}(V_{s_{-2}} \cap \cdots \\ &\quad \cap \varphi^{-1}(V_{s_{-n+1}} \cap \varphi^{-1}(V_{s_{-n}}))\cdots)). \end{aligned}$$

由条件(ii)看出，对任意 n，I_n 是一铅直条．当 n 增加时，I_n 是一串前一个包含着后一个的铅直条，且 $d(I_n) \leqslant \nu^n$．根据引理 1，它们的交集是一铅直曲线：

$$V(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{p \in Q \mid p \in \varphi^k(V_{s_k}),\ k = 0, -1, \cdots\}.$$

类似地，考虑集合

$$\begin{aligned} J_n &= \{p \in Q \mid p \in \varphi^{k-1}(U_{s_k}),\ k = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= U_{s_1} \cap \varphi(U_{s_2}) \cap \cdots \cap \varphi^{n-1}(U_{s_n}). \end{aligned}$$

J_n 是一串一个包含着一个的水平条，且 $d(J_n) \leqslant \nu^{n-1}$，所以它们的交集是一水平曲线：

$$U(s) = \{p \in Q \mid p \in \varphi^{k-1}(U_{s_k}),\ k = 1, 2, \cdots\}.$$

因为 $\varphi(V_{s_k}) = U_{s_k}$，于是最初考虑的集合

$$\{p \in Q \mid p \in \varphi^k(V_{s_k}),\ k = 0, \pm 1, \cdots\} = V(s) \cap U(s)$$

是一铅直曲线与一水平曲线之交，根据引理 2，是 Q 中的一个点。这个点是由序列 (s) 所确定的。

总之，我们得到一映射 $\tau:\Sigma\to Q$，τ 将 Σ 中序列

$$(s)=(\cdots,s_{-1},s_0^*,s_1,\cdots)$$

对应到 Q 中的点 $V(s)\cap U(s)$，即

$$\tau(s)=V(s)\cap U(s).$$

由 τ 的定义，如果序列 $(s)\in\Sigma$ 对应到 Q 中之点 $\tau(s)=p$，则 (s) 的移位

$$\sigma(s)\equiv(\cdots,s_{-2},s_{-1}^*,s_0,\cdots)$$

对应到 Q 中之点 $\tau(\sigma(s))=\varphi(p)$. 也就是有关系式：

$$\tau\circ\sigma=\varphi\circ\tau.$$

下面来证明 τ 是同胚. 由 τ 的定义，若序列 (s) 与 $(\bar{s})$ 在同一个柱 U_n 之中，即 $s_j=\bar{s}_j$，对一切 j，$|j|\leqslant n$，则它们的像点 $\tau(s)$ 与 $\tau(\bar{s})$ 属于同一个铅直条 I_n 与同一个水平条 J_n. 而 $d(I_n)\leqslant\nu^n$，$d(J_n)\leqslant\nu^{n-1}$，所以由引理 3 得到

$$|\tau(s)-\tau(\bar{s})|\leqslant(1-\mu)^{-1}(\nu^n+\nu^{n-1}).$$

由此得知 $\tau(s)$ 连续. 显然 τ 是单一的，因为 V_a 互不相交. 记 τ 的像集合为 Λ，不难看出

$$\Lambda=\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}\varphi^k(W),$$

其中

$$W=\bigcup_{a\in P}V_a.$$

因 P 中元素的个数有限，V_a 是闭集，所以 W 是闭集，从而 Λ 是闭集. 于是，τ 是由紧拓扑空间 Σ 到 Q 中闭集 Λ 上的连续、单一、满的映射. 所以 τ 是一个同胚.

由 Λ 的表示式可见它是 φ 的不变集，是一个 Cantor 集. ∎

根据定理 3.9，当 φ 限制在 Λ 上时，它的动力学行为与移位自同构 σ 在 Σ 上相同. 也就是说，φ 的周期点在 Λ 内是稠的. 存在

一点 $p\in\Lambda$，使从 p 出发的轨线

$$O_\varphi(p)=\{\varphi^k(p),\ k=0,\ \pm1,\cdots\}$$

在 Λ 内是稠的，φ 在 Λ 上是拓扑混合的，等等.

如果上面考虑的 φ 是一个微分同胚，则可以将条件(ii)换成一个较便于检验的条件. 先将 φ 用坐标表出:

$$\begin{cases}x_1=f(x,y),\\ y_1=g(x,y),\end{cases}$$

(x_1,y_1) 是 (x,y) 的像点. 线性映射 $d\varphi$ 将 (x,y) 处的切向量 (ξ,η) 映成 (x_1,y_1) 处的切向量 (ξ_1,η_1)，它们有如下的关系:

$$\begin{cases}\xi_1=f_x\xi+f_y\eta,\\ \eta_1=g_x\xi+g_y\eta.\end{cases}$$

下面是一个对于微分同胚 φ 的条件——**双曲条件**:

(iii) $d\varphi$ 将 $\bigcup\limits_{a\in P}V_a$ 上的扇形丛 $S^+:|\eta|\leqslant\mu|\xi|$ 映到 $\bigcup\limits_{a\in P}U_a$ 上扇形丛 S^+ 内，即

$$d\varphi(S^+)\subset S^+;$$

并且，若 $(\xi,\eta)\in S^+$，(ξ_1,η_1) 是它的像，则

$$|\xi_1|>\mu^{-1}|\xi|.$$

类似的，$d\varphi^{-1}$ 将 $\bigcup\limits_{a\in P}U_a$ 上的扇形丛 $S^-:|\xi|\leqslant\mu|\eta|$ 映到 $\bigcup\limits_{a\in P}V_a$ 上扇形丛 S^- 内，即

$$d\varphi^{-1}(S^-)\subset S^-;$$

并且，若 $(\xi,\eta)\in S^-$，而 (ξ_0,η_0) 是它在 $d\varphi^{-1}$ 下的像，则

$$|\eta_0|>\mu^{-1}|\eta|.$$

定理 3.10 若 φ 是微分同胚，满足条件(i)与条件(iii)，又其中 $\mu\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，则条件(ii)对于 $\nu=\frac{\mu}{1-\mu}$ 成立. 从而定理 3.9 的结论成立.

证明 只要证明由条件(i)与(iii)可得条件(ii).

首先当φ是微分同胚时，由(i)，水平条的边与铅直条的边都是光滑曲线. 再由上定理的证明可见，条件(ii)只需对边界光滑的铅直条V与水平条U成立即可.

令γ是铅直条$V_b(b\in P)$中的一根光滑铅直曲线. 由引理2，它与任一水平曲线相交，特别与水平条U_a的水平边界曲线相交. 于是曲线段$\hat{\gamma}=\gamma\cap U_a$连接$U_a$的两个水平边界（见图3.6），所以$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$连接$\varphi^{-1}(U_a)=V_a$的两个水平边界：$y=0$与$y=1$. 下面我们来证明$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$是一铅直曲线.

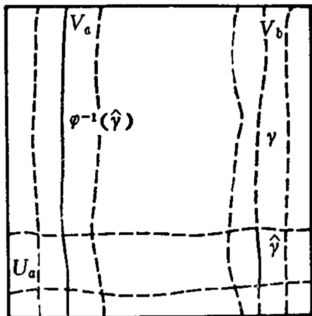


图 3.6

因为γ是一铅直曲线，故可表为$x=v(y)$，且满足不等式

$$|v(y_1)-v(y_2)|\leqslant\mu|y_1-y_2|,$$
$$0\leqslant y_1, y_2, \leqslant 1.$$

因$\hat{\gamma}$光滑，故$\hat{\gamma}$上任一点处的切向量(ξ_1,η_1)满足$|\xi_1|\leqslant\mu|\eta_1|$，即$(\xi_1,\eta_1)\in S^-$. 由条件(iii)，$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$上任一点处的切向量$(\xi_0,\eta_0)$满足$|\xi_0|\leqslant\mu|\eta_0|$. 由中值公式，$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$上任意两点$(x_3,y_3)$，$(x_4,y_4)$满足不等式

$$|x_3-x_4|\leqslant\mu|y_3-y_4|.$$

所以由$y_3=y_4$就得到$x_3=x_4$，也就是说$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$是一个函数$x=\omega(y)(0\leqslant y\leqslant 1)$的图形，且满足

$$|\omega(y_3)-\omega(y_4)|\leqslant\mu|y_3-y_4|,$$

即$\varphi^{-1}(\hat{\gamma})$也是一铅直曲线.

将以上结果用于V_b中的铅直条V的铅直边界曲线，记$\hat{V}=V\cap U_a$，$\hat{V}$的原像

$$\varphi^{-1}(\hat{V})=\varphi^{-1}(V)\cap V_a$$

的铅直边界也是铅直曲线，所以$\varphi^{-1}(\hat{V})$是铅直条，这就证明了条件(ii)的前一部分.

下面我们对 $0<\mu<\frac{1}{2}$，即 $0<\nu=\frac{\mu}{1-\mu}<1$，来检验条件 (ii) 中直径之间的关系．为此，令 p_1，p_2 表示

$$\widetilde{V}_a=\varphi^{-1}(V)\cap V_a$$

的两个铅直边界上的有相同 y 坐标的两个点，它们使

$$d(\widetilde{V}_a)=|p_1-p_2|.$$

于是

$$p(t)=(1-t)p_1+tp_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

是铅直条 V_a 内的平行于 x 轴的直线．从而 $\dot{p}$ 沿着 x 轴，于是 $\dot{p}\in S^+$．由(iii)可知 $p(t)$ 的像曲线

$$z(t)=\varphi(p(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

的切向量

$$\dot{z}=\mathrm{d}\varphi(\dot{p})\in S^+,$$

所以 $z(t)$ 是一段水平曲线．因为 $p(0)$ 与 $p(1)$ 是联接铅直条 $\widetilde{V}_a$ 的铅直边界的直线 $p(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的两个端点，所以 $z(0)$ 与 $z(1)$ 是联接铅直条 $\hat{V}$ 的铅直边界的曲线 $z(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的两个端点．由引理 3 得

$$|z(0)-z(1)|\leqslant(1-\mu)^{-1}[d(V)+0].$$

记 $z(t)=(x(t),y(t))$，根据条件 (iii)，在 $\bigcup\limits_{a\in P}V_a$ 中 $|\xi_1|>\mu^{-1}|\xi_0|$，所以

$$|\dot{x}|>\mu^{-1}|\dot{p}|=\mu^{-1}|p_1-p_2|>0,$$

$\dot{x}$ 不变号．于是

$$\begin{aligned}|p_1-p_2|&=\int_0^1|\dot{p}|\mathrm{d}t\leqslant\mu\int_0^1|\dot{x}|\mathrm{d}t=\mu\left|\int_0^1\dot{x}\mathrm{d}t\right|\\&=\mu|x(1)-x(0)|\leqslant\mu|z(1)-z(0)|\\&\leqslant\mu(1-\mu)^{-1}d(V),\end{aligned}$$

即

$$d(\widetilde{V}_a)\leqslant\frac{\mu}{1-\mu}d(V).$$

上面证明了条件(ii)中关于铅直条的一切假设. 关于水平条的假设可类似地得到. ▮

例 1 Hénon 映射.

F 是方块 $Q=\{-R\leqslant x\leqslant R;-R\leqslant y\leqslant R\}$ 上的映像. $(x_1, y_1)=F(x, y)$, 定义如下:

$$\begin{cases}x_1=A+By-x^2,\\ y_1=x,\end{cases}$$

其中参数 $A>0$, $0<|B|\leqslant 1$. F 的导算子

$$\mathrm{d}F=\frac{\mathrm{D}(x_1, y_1)}{\mathrm{D}(x, y)}=\begin{vmatrix}-2x & B\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-B\neq 0,$$

所以 F 是一微分同胚. 当参数 A, B, R 满足以下条件:

(1) $A-\dfrac{|B|+1}{2}\left[|B|+1+\sqrt{(|B|+1)^2+4A}\right]>4$,

(2) $R=\dfrac{1}{2}\left[|B|+1+\sqrt{(|B|+1)^2+4A}\right]$,

从而满足

(3) $A-(|B|+1)R>4$

时, F 有以下性质:

性质 1 $F(Q)\cap Q$ 是 Q 中两个横条形区域,记作 U_a, U_b. 它们是由抛物线

$$x_1=A\pm BR-y_1^2 \text{ 与 } x_1=\pm R$$

所围, 见图 3.7(b).

证明 直线 $y=\pm R$ 映为抛物线 $x_1=A\pm BR-y_1^2$, 由条件(3)得 $A-|B|R>R$, 所以两抛物线之顶点 $(A\pm BR, 0)$ 都在直线 $x_1=R$ 右方.

直线 $x=\pm R$ 映为直线 $y_1=\pm R$. 上两抛物线中之右者

$$x_1=A+|B|R-y_1^2$$

与 $y_1=\pm R$ 交于点 $(A+|B|R-R^2, \pm R)$. 由条件(2)得

$$A+|B|R-R^2=-R,$$

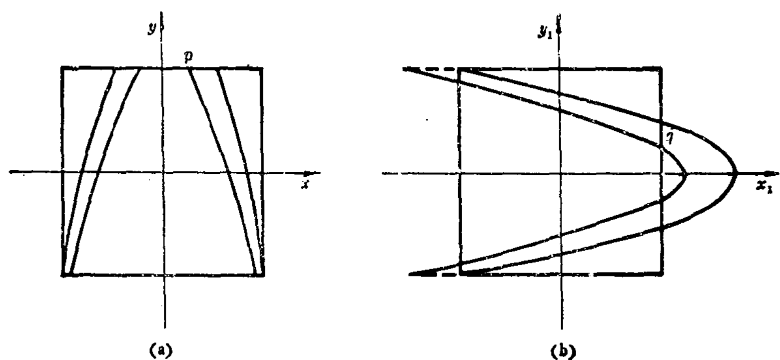


图 3.7

所以交点之坐标为$(-R, \pm R)$. ▮

性质 2 U_a, U_b 的原像是 Q 中两个竖条形区域，记作 V_a, V_b. 它们是由抛物线

$$A + By - x^2 = \pm R$$

与直线$y = \pm R$所围，见图 3.7(a).

证明 U_a, U_b 的四条抛物线边界的原像显然在直线 $y = \pm R$ 上. 四条直线边界的原像在抛物线

$$A + By - x^2 = \pm R \quad 即 \quad y = \frac{1}{B}(x^2 - A \pm R)$$

上. 图 3.7(a) 是设 $B < 0$ 而作的，若 $B > 0$，图形与图 3.7(a) 关于 x 轴对称. ▮

性质 3 U_a, U_b 的抛物线边界上一切点处对 x 轴的斜率或 V_a, V_b的抛物线边界上一切点处对 y 轴的斜率，其绝对值都不超过 $\mu = \frac{1}{k}$，其中 $k = \sqrt{A - (|B| + 1)R}$.由条件(3)有 $\mu < \frac{1}{2}$.

证明 由图 3.7(a) 与 (b) 显然可见点 $p = (k, R)$ 与点 $q = (R, k)$ 处斜率的绝对值分别在 V_a, V_b 与 U_a, U_b 上最大，而

$$x'|_p = \frac{B|}{2x|_p} = \frac{B}{2k},$$

$$y_1'|_q = -\frac{1}{2y_1}\bigg|_q = -\frac{1}{2k},$$

由$|B| \leqslant 1$，所以性质 3 成立．∎

由以上 3 个性质得知，存在一正数 μ，$\mu < \frac{1}{2}$，使U_a，U_b 与 V_a，V_b 对 μ 是水平条与铅直条．映射 F 满足条件（i）．下面来证明 F 还满足条件(iii)．

性质 4 当 $(x, y) \in V_a, V_b$ 时，

$$\mathrm{d}F = \begin{pmatrix} -2x & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

映扇形 $S^+: |\eta| \leqslant \mu|\xi|$ 到 S^+ 内，且

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \mathrm{d}F \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

时有$|\xi_1| \geqslant \mu^{-1}|\xi|$．

当 $(x, y) \in U_a, U_b$ 时，

$$\mathrm{d}F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{B} & \frac{2y}{B} \end{pmatrix}$$

映扇形 $S^-: |\xi| \leqslant \mu|\eta|$ 到 S^- 内，且

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}F^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

时有$|\eta_0| \geqslant \mu^{-1}|\eta|$．

证明 当 $(x, y) \in V_a, V_b$，$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in S^+$，即$|\eta| \leqslant \mu|\xi|$时，有

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \mathrm{d}F \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x\xi + B\eta \\ \xi \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= |-2x\xi + B\eta| \geqslant |2x||\xi| - |B||\eta| \\ &\geqslant [|2x| - |B|\mu]|\xi|, \end{aligned}$$

而 $|\eta_1| = |\xi|$，所以

$$|\xi_1| \geqslant [\,|2x| - |B|\mu]\,|\eta_1|.$$

因为当 $(x, y) \in V_a, V_b$ 时有 $|x| \geqslant k$，所以

$$|2x| - |B|\mu \geqslant 2k - \mu = \frac{1}{\mu}(2 - \mu^2)$$

$$> \frac{1}{\mu}\left(2 - \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{\mu}.$$

注意 $|\eta_1| = |\xi| \neq 0$，就得到 $|\xi_1| \geqslant \frac{1}{\mu}|\eta_1|$， 即 $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix} \in S^+$。$\mathrm{d}F$ 将 S^+ 映到 S^+ 内，且有 $|\xi_1| \geqslant \frac{1}{\mu}|\xi|$。

第二部分性质的证明可以完全类似地得到，不再重复。∎

总起来，当参数 A，B，R 满足上述条件时，映射 F 满足定理 3.10 的条件，所以它以序列空间 Σ 的移位自同构 σ 为其子系统。

2. 不变集 Λ 的双曲结构

定义 称映射 φ 的不变集 Λ 具有**双曲结构**，如果 $\forall p \in \Lambda$ 对应两直线 L_p^+ 与 L_p^-，它们随 p 连续地变化，满足以下两个条件：

(i) 线束

$$L^+ = \{L_p^+ \mid p \in \Lambda\} \text{ 与 } L^- = \{L_p^- \mid p \in \Lambda\}$$

在映射 φ 之下不变，即

$$\mathrm{d}\varphi(L_p^\pm) = L_{\varphi(p)}^\pm.$$

(ii) $\exists$ 常数 $\lambda > 1$，又向量 $\zeta = (\xi, \eta)$ 之模 $|\zeta| \equiv \max(|\xi|, |\eta|)$，有

$$|\mathrm{d}\varphi(\zeta)| \geqslant \lambda|\zeta|,\quad \zeta \in L_p^+$$

与

$$|\mathrm{d}\varphi^{-1}(\zeta)| \geqslant \lambda|\zeta|,\quad \zeta \in L_p^-.$$

例2 由 $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 导出的 T^2 上的双曲线性自同构 A 的

不变集 T^2 有双曲结构，其中 L_p^+，L_p^- 分别沿 $\hat{A}$ 的特征值 $\lambda_1(\lambda_1 > 1)$，$\lambda_2(0 < \lambda_2 < 1)$ 的特征向量的方向．取常数

$$\lambda = \min\left(\lambda_1, \ \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

即可．

为了简化下面的符号，将点 p 处的 $d\varphi$ 记作 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，即令

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x,y)=p},$$

又令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

定理 3.11　设 φ 是微分同胚，满足定理 3.10 的条件，又

$$|\Delta|, \ |\Delta|^{-1} < \frac{1}{2}\mu^{-2},$$

则定理 3.10 中的不变集 Λ 具有双曲结构．

证明　(1) 应用压缩映像原理构造线束 L^+，L^-．

考虑 S^+：$|\eta| \leqslant \mu|\xi|$ 中任一随 p 连续变化的线束

$$L = \{L_p \mid p \in \Lambda\}.$$

令每一线束 $L = \{L_p\}$ 对应到 Λ 上一个函数 α_p，它们的关系为：L_p 是过点 p 的直线

$$\eta = \alpha_p \xi.$$

显然 α_p 是 p 的连续函数，$\sup\limits_{p\in\Lambda}|\alpha_p| \leqslant \mu$．

线束 $\{L_p\}$ 经 φ 作用成为线束 $\{L_p^*\}$，即 $L_{\varphi(p)}^*$ 是过点 $\varphi(p)$ 的直线

$$\eta = \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p}\xi.$$

于是线束 $\{L_p^*\}$ 对应到函数 α_p^*，满足

$$\alpha^*_{\varphi(p)} = \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p}.$$

因为 $\Lambda \subset \bigcup_{a \in p} V_a$，由条件(iii)知$|\xi_1| \geqslant \mu^{-1}|\xi|$，即

$$|(a + b\alpha_p)\xi| \geqslant \mu^{-1}|\xi|,$$

所以有

$$|a + b\alpha_p| \geqslant \mu^{-1} > 0.$$

又由条件(iii)，$d\varphi(S^+) \subset S^+$，所以有

$$\left|\frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p}\right| \leqslant \mu.$$

于是函数 α^*_p 也是 p 的连续函数且 $\sup\limits_{p \in \Lambda}|\alpha^*_p| \leqslant \mu$.

如果另一线束对应于函数 β_p，经 φ 作用所得线束对应于函数 β^*_p，则有

$$|\alpha^*_{\varphi(p)} - \beta^*_{\varphi(p)}| = \left|\frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p} - \frac{c + d\beta_p}{a + b\beta_p}\right|$$

$$= \frac{|\Delta|}{|a + b\alpha_p| \cdot |a + b\beta_p|} |\alpha_p - \beta_p|.$$

由上面证得的不等式 $|a + b\alpha_p| \geqslant \mu^{-1}$ 与假设$|\Delta| < \frac{1}{2}\mu^{-2}$，所以

$$|\alpha^*_{\varphi(p)} - \beta^*_{\varphi(p)}| \leqslant |\Delta|\mu^2|\alpha_p - \beta_p|$$

$$< \frac{1}{2}|\alpha_p - \beta_p|.$$

因 Λ 是 φ 的不变集，所以

$$\sup_{p \in \Lambda}|\alpha^*_p - \beta^*_p| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{p \in \Lambda}|\alpha_p - \beta_p|.$$

对 Λ 上 S^+ 中连续变化的线束 $L = \{L_p\}$ 定义映射 Φ 如下:

$$(\Phi L)_{\varphi(p)} = d\varphi(L_p).$$

上面已证明了，对于模 $\sup\limits_{p \in \Lambda}|\alpha_p - \beta_p|$，映射 Φ 是压缩映射. 由压

缩映射原理，S^+ 中存在唯一一个连续线束，记作 L^+，它在映射 Φ 之下不变，即 $\Phi L^+ = L^+$. 也就是

$$L^+_{\varphi(p)} = (\Phi L^+)_{\varphi(p)} = \mathrm{d}\varphi(L^+_p).$$

于是，此 L^+ 满足双曲结构中条件 (i).

可以类似地在 S^- 中构造出线束 $L^- = \{L^-_p\}$ $\left(\text{因为有} |\Delta|^{-1} < \frac{1}{2}\mu^{-2}\right)$ 满足条件 (i).

(2) 检验 L^+, L^- 满足双曲结构中的条件 (ii).

当 $\zeta \in L^+$ 时，由 L^+ 的构造方法，$\zeta \in S^+$，$\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$，则

$$|\eta| \leqslant \mu|\xi| < |\xi|,$$

从而 $|\zeta| = |\xi|$. 由于 φ 满足条件 (iii), $\mathrm{d}\varphi(\zeta) \in S^+$, 令 $\mathrm{d}\varphi(\zeta) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$，就有

$$|\mathrm{d}\varphi(\zeta)| = |\xi_1|.$$

再由 (iii) 还有 $|\xi_1| \geqslant \mu^{-1}|\xi|$，所以

$$|\mathrm{d}\varphi(\zeta)| \geqslant \mu^{-1}|\zeta|, \quad \zeta \in L^+.$$

类似地可得，当 $\zeta \in L^-$ 时

$$|\mathrm{d}\varphi^{-1}(\zeta)| \geqslant \mu^{-1}|\zeta|.$$

取 $\lambda = \mu^{-1}$ 就有 $\lambda > 1$. ▮

例 3 对于例 1 中的 Hénon 映射，

$$\mathrm{d}F = \begin{pmatrix} -2x & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $|\Delta| = |B|$; $\mu < \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{1}{2}\mu^{-2} > 2$. 因此，除例 1 中已要求的各条件之外，再要求 $|B| > \frac{1}{2}$，所得 F 的不变集 Λ 就有双曲结构.

下面的定理对不变集 Λ 作了更深入一步的讨论.

定理 3.12 条件同上定理，则 Smale 马蹄定理证明中构造出的曲线 $U(s)$ 与 $V(s)$ 是连续可微的，它在 Λ 中的点 p 处的切线可取作双曲结构中的直线 L_p^+，L_p^-。

证明 (1) 考虑一个包含着 Λ 的集合 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{(s)\in\Sigma}U(s)$ 上的 S^+ 中的直线束 $\{L_p\}$ 的映射 Φ。

因为 $U(s)=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varphi^k(V_{s_k})$，所以

$$\varphi^{-1}(U(s))=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varphi^{k-1}(V_{s_k})$$

$$=V_{s_1}\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\varphi^k(V_{s_{k+1}})\right)$$

$$=V_{s_1}\cap U(\sigma^{-1}(s)).$$

于是 $\varphi^{-1}(\mathscr{U})\subset\bigcup\limits_{a\in p}V_a$，$\varphi^{-1}(\mathscr{U})\subset\mathscr{U}$，即对 $\forall p\in\mathscr{U}$，有 $\varphi^{-1}(p)\in\bigcup\limits_{a\in p}V_a$ 且 $\varphi^{-1}(p)\in\mathscr{U}$。这样一来，我们稍加修改可以像上定理证明中那样对 $\mathscr{U}$ 上的 S^+ 中的直线束 $\{L_p\}$ 来定义映射 Φ 如下：

$$(\Phi L)_p=\mathrm{d}\varphi L_{\varphi^{-1}(p)}.$$

此 Φ 仍有压缩性，这是因为类似于上定理有

$$|\alpha_p^*-\beta_p^*|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha_{\varphi^{-1}(p)}-\beta_{\varphi^{-1}(p)}|.$$

所以

$$\sup_{p\in\mathscr{U}}|\alpha_p^*-\beta_p^*|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{p\in\mathscr{U}}|\alpha_{\varphi^{-1}(p)}-\beta_{\varphi^{-1}(p)}|.$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{q\in\varphi^{-1}(\mathscr{U})}|\alpha_q-\beta_q|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{p\in\mathscr{U}}|\alpha_p-\beta_p|,$$

(2) $U(s)$ 连续可微的等价条件.

设 $p\in\mathscr{U}$, $p=(\bar{x},\bar{y})$, p 在水平曲线 $U(s)$: $y=u(x)$ 上。令 T_p 是过 $y=u(x)$ 上任意两点 q_1, q_2 的割线当 q_1, $q_2\to p$ 时的极限直线的集合,即 T_p 是过点 P 的直线 $\eta=a_p\xi$ 的集合,其中

$$a_p=\lim_{\nu\to\infty}\frac{u(x_\nu)-u(x_\nu')}{x_\nu-x_\nu'},$$

$x_\nu\neq x_\nu'$, $x_\nu, x_\nu'\to\bar{x}$, 且使以上极限存在. 由于 $y=u(x)$ 是水平曲线,所以 $|a_p|\leqslant\mu$. 又取定点 P 之后,数集合 $\{a_p\}$ 是闭的.

令 $\omega(T_p)\equiv\max\{a_p\}-\min\{a_p\}\leqslant 2\mu$. 显然 $\omega(T_p)=0$ 成立的充要条件是: 曲线 $y=u(x)$ 在点 P 处有切线即函数 $y=u(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 可微,即极限

$$\lim_{x_1,x_2\to\bar{x}}\frac{u(x_1)-u(x_2)}{x_1-x_2}$$

存在,记作 $u'(x)$. 因为若 $u'(x)$ 处处存在则 $u'(x)$ 连续,所以为证 $U(s)$ 连续可微,只要证: 对一切 $p\in U(s)$, $\omega(T_p)=0$.

(3) $\mathscr{U}$ 上的线束 $T=\{T_p|p\in\mathscr{U}\}$ 在映像 Φ 之下不变,即

$$(\Phi T)_p=T_p$$

(此时对 $\forall p\in\mathscr{U}$, T_p 可能是多根 S^+ 中的直线). 由(1)中 Φ 的定义,为证此关系式只要证:

$$\mathrm{d}\varphi T_{\varphi^{-1}(p)}=T_p.$$

设 $p\in U(s)$: $y=u(x)$, 取 p_1, $p_2\in U(s)\subset\mathscr{U}$. 令

$$q=\varphi^{-1}(p),\quad q_i=\varphi^{-1}(p_i),\quad i=1,2.$$

由(1), q, q_1, $q_2\in\mathscr{U}$ 且在同一水平曲线 $y=\tilde{u}(x)$ 上. 由中值定理

$$p_2-p_1=\varphi(q_2)-\varphi(q_1)=\mathrm{d}\varphi|_{\bar{q}}(q_2-q_1),$$

其中 $\bar{q}$ 在 q_1, q_2 之间,即

$$\begin{pmatrix}x_2-x_1\\u(x_2)-u(x_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_x & f_y\\g_x & g_y\end{pmatrix}_{\bar{q}}\begin{pmatrix}\bar{x}_2-\bar{x}_1\\\tilde{u}(\bar{x}_2)-\tilde{u}(\bar{x}_1)\end{pmatrix},$$

于是

$$\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g_x+g_y\dfrac{\tilde{u}(\bar{x}_2)-\tilde{u}(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}}{f_x+f_y\dfrac{\tilde{u}(\bar{x}_2)-\tilde{u}(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}}$$

当 $p_1, p_2\to p$ 时，$q_1, q_2\to q$ 且 $\bar{\bar{q}}\to q$。如果 $\frac{\tilde{u}(\bar{x}_2)-\tilde{u}(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}$ 极限存在为 α，则 $\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}$ 极限存在为 β（不可能是 ∞，因为有界 μ）且 $\beta=\frac{g_x+g_y\alpha}{f_x+f_y\alpha}$。类似地，若 $\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}$ 极限存在，则 $\frac{\tilde{u}(\bar{x}_2)-\tilde{u}(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}$ 极限存在。总之，有

$$\mathrm{d}\varphi T_q=T_p,\quad q=\varphi^{-1}(p).$$

(4) 对 $\forall p\in\mathscr{U}$，$\omega(T_p)=0$。

若某个 $p\in\mathscr{U}$ 使 $\omega(T_p)\neq 0$，在此点 p 应用 T 在 Φ 下的不变性，得

$$\omega(T_p)=\omega((\Phi T)_p).$$

另一方面，由(1)中不等式

$$|\alpha_p^*-\beta_p^*|\leqslant\frac{1}{2}\,|\alpha_{\varphi^{-1}(p)}-\beta_{\varphi^{-1}(p)}|$$

得

$$\omega((\Phi T)_p)\leqslant\frac{1}{2}\,\omega(T_{\varphi^{-1}(p)}).$$

所以有关系式

$$2\omega(T_p)\leqslant\omega(T_{\varphi^{-1}(p)}).$$

重复 n 次此不等式得

$$2^n\omega(T_p)\leqslant\omega(T_{\varphi^{-n}(p)}).$$

因为对 $\forall p\in\mathscr{U}$，$\omega(T_p)\leqslant 2\mu$，所以上不等式右端有界 2μ。若左端 $\omega(T_p)\neq 0$，则矛盾，所以 $\omega(T_p)=0$。

总结以上讨论得知：T_p 中只有一根直线，是水平曲线 $U(s)$

在点 P 处的切线。$U(s): y = u(x)$ 是连续可微的。由于 T 在 φ 下不变，$T_p \in S^+$，所以当 $P \in \Lambda$ 时，T 就是上定理中的 L^+，即 $U(s)$ 在点 $P \in \Lambda$ 处的切线就是双曲结构中的 L_p^+。

类似地可证，$P \in \Lambda$ 时 $V(s)$ 在 P 处的切线就是 L_p^-。■

最后来讨论 Smale 马蹄在不变集 Λ 上的结构稳定性。

由定理 3.10 已知，当微分同胚 φ 对 $\mu < \frac{1}{2}$ 满足条件(i)与(iii)时，存在 φ 的不变集 $\Lambda \subset Q$ 与同胚 $\tau: \Sigma \to \Lambda$，使以下关系成立：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda \end{array}$$

如果微分同胚 φ 作小扰动后的微分同胚 ϕ 也对某个 $\bar{\mu} < \frac{1}{2}$ 满足条件(i)与(iii)，则由定理 3.10，存在 ϕ 的不变集 $\bar{\Lambda} \subset Q$，同胚 $\bar{\tau}: \Sigma \to \bar{\Lambda}$ 使

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \downarrow{\scriptstyle\bar{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\tau}} \\ \bar{\Lambda} & \xrightarrow{\phi} & \bar{\Lambda} \end{array}$$

显然，结合以上两个关系式立刻得到

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle\bar{\tau}\circ\tau^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\tau}\circ\tau^{-1}} \\ \bar{\Lambda} & \xrightarrow{\phi} & \bar{\Lambda} \end{array}$$

也就是说：$\varphi: \Lambda \to \Lambda$ 与 $\phi: \bar{\Lambda} \to \bar{\Lambda}$ 是拓扑共轭的。

如果对微分同胚 φ 作 C^1 小扰动后的微分同胚 ϕ 都与 φ 有以上关系，则称 φ 在不变集 Λ 上是**结构稳定的**。

为了使微分同胚 φ 小扰动后的 ϕ 都能对某 $\mu < \frac{1}{2}$ 满足条件(i)与(iii),需要对 φ 再加一些条件.例如,设集合

$$O' = \{0 \leqslant x \leqslant 1, -\varepsilon \leqslant y \leqslant 1 + \varepsilon\},$$
$$O'' = \{-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1 + \varepsilon, 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

要求 $\varphi: O' \to \boldsymbol{R}^2$, 使

$$\varphi(O') \cap O'' = \bigcup_{a \in P} \widetilde{U}_a,$$

$\widetilde{U}_a$ 是 O'' 上互不相交的水平条. $\varphi^{-1}(\widetilde{U}_a) = \widetilde{V}_a$, $\widetilde{V}_a$ 是 O' 上互不相交的铅直条. 又如, 要求存在 $\delta > 0$, 使 $\mu + \delta < \frac{1}{2}$, 然后 φ 满足加强了的条件(iii): φ 将 $\bigcup_{a \in P} \widetilde{V}_a$ 上的扇形丛

$$S_\delta^+: |\eta| \leqslant (\mu + \delta)|\xi|$$

映到扇形丛

$$S^+: |\eta| \leqslant \mu|\xi|$$

内. 又有

$$|\xi_1| \geqslant (\mu - \delta)^{-1}|\xi|.$$

此问题的详细讨论见[10]与[11].

§3.6 C^r 拓 扑

如果函数 $f: I \to \boldsymbol{R}$, I 是 $\boldsymbol{R}$ 上闭区间, f 在 I 上有 $r(r \geqslant 0)$ 阶连续导数,即 $f \in C^r[I, \boldsymbol{R}]$ 时,我们经常取 f 的模为

$$\|f\|_r = \max\{\sup_{x \in I}|f(x)|, \sup_{x \in I}|f'(x)|, \cdots, \sup_{x \in I}|f^{(r)}(x)|\}$$
$$= \sup_{x \in I}\{|f^{(j)}(x)|, j = 0, 1, \cdots, r\}.$$

如果映射 $f: U \to \boldsymbol{R}^s$, U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中紧集, f 为 r 阶连续可导时, 即 $f \in C^r[U, \boldsymbol{R}^s]$, 可取 f 的模为

$$\|f\|_r = \sup_{x \in U}\{\|D^j f(x)\|, j = 0, 1, \cdots, r\},$$

其中：

$$\|D^j f(x)\| = \max\left\{\sum_{\substack{\Sigma i_k = j \\ i_k \geq 0}} \left|\frac{\partial^j f_i(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|,\ i = 1,\cdots,s\right\}.$$

如果映射 $f: M \to \boldsymbol{R}^s$，$M$是$m$维紧流形，当 f 为 $r\,(r \geq 0)$阶连续可导时，即 $f \in C^r[M, \boldsymbol{R}^s]$，我们如下地定义 f 的模：

因M紧，存在有限个卡 $(\varphi_i, U_i)(i = 1,\cdots,k)$ 使 $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ 覆盖了M。于是对 $\forall x \in M$，$\exists i$，使 $x \in U_i$。作以 $\varphi_i(x)$ 为心，半径为 $\varepsilon(x)$ 的球形邻域使之在 $\varphi_i(U_i)$ 之内。取以 $\varphi_i(x)$ 为心，半径为$\varepsilon\,(x)/2$ 的球形邻域，此邻域在 φ_i 下之原像为 x 在 U_i 中的邻域（若 x 在多于一个 U_i 之中，则取各原像之交为 x 在各 U_i 中邻域）。于是，$\forall x \in M$，都对应到一个包含 x 的邻域，故存在其中有限个 $x_l(l = 1,\cdots,k)$，其邻域覆盖 M。对M中开集 U_i 考虑集合

$$\mathscr{U}_i = \left\{x \in U_i \,|\, d(\varphi_i(x),\ \varphi_i(x_l)) < \frac{\varepsilon(x_l)}{2},\ 当\ x_l \in U_i\right\}.$$

显然 $\overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)} \subset \varphi_i(U_i)$，且 $\bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{U}_i$ 覆盖了所有 $x_l(l = 1,\cdots,k)$ 的邻域，从而覆盖了 M。

记 $f^i = f\circ\varphi_i^{-1}$，$f^i: \overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)} \to \boldsymbol{R}^s$ $(i = 1,\cdots,k)$。令 f 的模为

$$\|f\|_r = \max_i\ \sup\{\|D^j f^i_{(u)}\|, u \in \overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)},\quad j = 0, 1,\cdots,r\}.$$

取不同的卡时，如此定义出的模是等价的。

命题3.13 对以上定义的模 $\|\cdot\|_r$，$C^r[M, \boldsymbol{R}^s]$ 是完备的。

证明 设 $f_n: M \to \boldsymbol{R}^s$，$n = 1, 2,\cdots$，对 $\|\cdot\|_r$ 是 Cauchy 序列。于是对 $\forall p \in M$，$f_n(p)$ 是 $\boldsymbol{R}^s$ 中的 Cauchy 序列，因此收敛于一点 $f(p) \in \boldsymbol{R}^s$，即 $f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(p)$。特别的，$f_n^i(u) \to f^i(u)$，对 $u \in \overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)}$，$i = 1,\cdots,k$。其中 $f_n^i = f_n\circ\varphi_i^{-1}$，$f^i = f\circ\varphi_i^{-1}$。

对任意固定的 $u\in\overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)}$, $\mathrm{D}f_n^i(u)$ 是线性算子空间 $L(R^m, R^s)$ 中的 Cauchy 序列，因此 $\mathrm{D}f_n^i(u)$ 收敛于 $T^i(u)\in L(R^m, R^s)$.

我们已知，对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0$, 当 $n,\bar{n}\geqslant n_0$, 对一切 $u\in\overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)}$,

$$\|\mathrm{D}f_n^i(u)-\mathrm{D}f_{\bar{n}}^i(u)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

而

$$\|\mathrm{D}f_n^i(u)-T^i(u)\| \leqslant \|\mathrm{D}f_n^i(u)-\mathrm{D}f_{\bar{n}}^i(u)\|+\|\mathrm{D}f_{\bar{n}}^i(u)-T^i(u)\|.$$

注意，对任意固定的 $u\in\overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)}$, 总有 $\bar{n}=\bar{n}(u)\geqslant n_0$, 使

$$\|\mathrm{D}f_{\bar{n}}^i(u)-T^i(u)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，当 $n\geqslant n_0$ 时，对一切 $u\in\overline{\varphi_i(\mathscr{U}_i)}$, 有

$$\|\mathrm{D}f_n^i(u)-T^i(u)\|<\varepsilon,$$

即收敛是一致的. 因此，f^i 是连续可导的，且 $\mathrm{D}f^i=T^i$. 所以，对模 $\|\cdot\|_1$, $f_n\to f$.

类似地讨论可归纳出，若 f 是 r 次连续可导的，对模 $\|\cdot\|_r$, $f_n\to f$. 总之，对模 $\|\cdot\|_r$, Cauchy 序列是收敛序列. ∎

可以类似地定义流形 M 到流形 N 的 r 次连续可导映像 f 的模 $\|f\|_r$ (只要将 N 嵌入某个 R^s 之中)并且得到 Banach 空间 $C^r[M, N]$. 对于各种不同的嵌入法，所得到的模是等价的. 这些比较细致的问题，这里不再详细讨论.

$C^r[M,M]$ 中全体 C^r 微分同胚组成的集合记作 $\mathrm{Diff}^r(M)$, 它是 $C^r[M,M]$ 中的开集.

第四章　Hartman 定理与稳定流形定理

§4.1　双曲奇点与双曲不动点

考虑非线性系统

$$\dot{x} = X(x),$$

其中 $x \in M$，M是 n 维紧流形；$X \in \mathscr{X}^r(M)$ $(r \geqslant 1)$ 或 $x \in \boldsymbol{R}^n$，$X \in C^r(r \geqslant 1)$.

定义　称点 $p \in M$是系统 $\dot{x} = X(x)$ 或是向量场X 的**奇点**，如果 $X(p) = 0$. 若p 是X的奇点，且 $DX(p): T_pM \to T_pM$ 无零特征值，则称p 是**简单奇点**，其中 DX 是X的导算子，$T_pM \cong \boldsymbol{R}^n$ 是点p 处的切空间. 如果进而 $DX(p)$ 无实部为零的特征值，则称p 是**双曲奇点**.

由以下例子可见，有非简单奇点或非双曲奇点的向量场是结构不稳定的.

例 1　设L是$\boldsymbol{R}^2$ 上的一个线性向量场，在标准基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

显然$\boldsymbol{R}^2$ 的一维子空间 x 轴中任一点都是L的奇点，是非简单奇点.

我们来证明，对 $\forall \varepsilon > 0$. 都存在不可数个向量场构成的集合 $\mathscr{M}$，使得 $\forall X \in \mathscr{M}$，都有 $\|X - L\| < \varepsilon$，但 $\forall X, Z \in \mathscr{M}$. X 与 Z 的流都不拓扑等价.

设 $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$是一个常向量场，集合 $K \subset \boldsymbol{R}$ 是紧子集. 取有界 C^∞ 函数 $\rho: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，使恰在集合$K$上为零. 且前 r 阶导数也都

有界。对任给的$\varepsilon > 0$,存在足够大的n,使$\frac{1}{n}\rho$的 C^r 模

$$\left\|\frac{1}{n}\rho\right\|_r < \varepsilon.$$

令向量场 $Z = L + \frac{1}{n}\rho Y$,显然,$\|Z - L\|_r < \varepsilon$,$Z$ 的奇点集合恰为 x 轴上集合 K.

如果 K_1 与 K_2 是 $\boldsymbol{R}$ 中两个不同胚的紧子集,则按以上方法构造出来的向量场 Z_1 与 Z_2 就不拓扑等价. 所以L附近向量场的等价类至少与$\boldsymbol{R}$中紧子集的同胚类一样多.

例 2 设L是由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

给出的$\boldsymbol{R}^2$上的线性向量场. 显然,原点(0,0)是唯一的奇点,是简单奇点,但非双曲奇点.

令 $\rho:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 是一个 C^∞ 函数,使得

$$\rho(0) = 0,\ \rho^{(k)}(0) = 0,\quad k = 1,2,\cdots.$$

考虑向量场

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} y + \rho(r^2)x \\ -x + \rho(r^2)y \end{pmatrix},\quad r^2 = x^2 + y^2.$$

显然,$X(0,0) = 0$,且

$$\mathrm{D}X(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此(0,0)也是X的简单奇点.

令K是$\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqslant 0\}$中一个包含$x = 0$的紧子集;$I$是一个包含$K$的区间. 取$\rho$使 $\rho(K) = 0$,ρ在$I - K$上不为零,而在$\boldsymbol{R} - I$上为零.

给定$\varepsilon > 0$与 $k \in \boldsymbol{N}$,存在ρ使 $\|X - L\|_k < \varepsilon$. 因为对系统$\dot{x} = X(x)$有

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = 2r^2\rho(r^2),$$

所以,若 $r_0 \in \boldsymbol{R}^+$ 使 $\rho(r_0^2) = 0$,则圆周 $r = r_0$ 是X的闭轨.

若区间$(a,b)\subset\boldsymbol{R}^+$, 使当 $r\in(a, b)$时, $\rho(r^2) > 0(<0)$, 而

$$\rho(a^2) = \rho(b^2) = 0,$$

则X在环状区域

$$\{z\in\boldsymbol{R}^2 \mid a < |z| < b\}$$

内的轨线都不闭,而以闭轨 $r = a$ 为 $\alpha(\omega)$ 极限集,以闭轨 $r = b$ 为 $\omega(\alpha)$ 极限集.

对于集合 K, 集合 $\{x\in\boldsymbol{R}^+ \mid x^2\in K\}$(与$K$同胚)是向量场$X$的闭轨与$x$轴的交点集. 因此, 当 K_1 与 K_2 不同胚时, 按以上方法构造出的向量场 X_1 与 X_2 不拓扑等价.

命题 4.1 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$,$p\in M$ 是X的简单奇点, 则存在X的邻域 $\mathscr{N}\subset\mathscr{X}^r(M)$, p的邻域 $U\subset M$ 与唯一一个连续映射 $\rho:\mathscr{N}\to U$, 使得任意向量场 $Y\in\mathscr{N}$, 都在U中有唯一简单奇点 $\rho(Y)$. 从而,简单奇点是孤立的.

证明 因为问题是局部的, 可在点p取局部坐标卡. 所以我们设

$$M = \boldsymbol{R}^m, \quad p = 0, \quad X\in\mathscr{X}^r(D^m),$$

其中 $D^m = \{x\in\boldsymbol{R}^m \mid |x| \leqslant 1\}$. 因为 $\mathscr{X}^r(D^m)$是 Banach 空间, 我们应用 Banach 空间的隐函数定理.

考虑映射 $\varphi: D^m\times\mathscr{X}^r(D^m)\to\boldsymbol{R}^m$,

$$\varphi(x, Y) = Y(x).$$

φ是C^1映射 ($\varphi(x, Y)$固定Y后为一向量场,对x是C^r的;固定x后,对Y是线性映射),

$$\varphi(0, X) = X(0) = 0.$$

由假设 $\mathrm{D}X(0)$ 无零特征值,所以

$$\mathrm{D}_1\varphi(0, X) = \mathrm{D}X(0): R^m\to\boldsymbol{R}^m$$

是同构。由隐函数定理，∃点 O 的邻域 $U_0\subset D^n$，X 的邻域 $\mathcal{N}\in\mathscr{X}^r(D^n)$，与唯一的 C^1 映射 $\rho:\mathcal{N}\to U_0$，使

$$\varphi(\rho(Y),Y)=Y(\rho(Y))=0.$$

即 $\rho(Y)$ 是 Y 的奇点．因为 $DX(0)$ 是同构，而同构的集合是开的，所以缩小 $\mathcal{N}$ 与 U_0 可使 $DY(\rho(Y))$ 是同构，即 $\rho(Y)$ 是 Y 的简单奇点．∎

命题 4.1 指出小扰动后的向量场在原向量场的（孤立）简单奇点附近存在唯一的简单奇点．下节中将给出 Hartman-Grobman 定理，它进一步指出向量场在双曲奇点附近是结构稳定的．

令 $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{X}^r(M)$ 是由一切奇点都是简单奇点的向量场全体组成的集合．因为 M 是紧的，简单奇点是孤立的，所以，若向量场 $X\in\mathscr{G}_0$，则 X 必只有有限个简单奇点．令 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_0$ 是由一切奇点都是双曲奇点的向量场全体组成的集合，关于它们有下面的命题，我们不加证明．

命题 4.2 $\mathscr{G}_0,\mathscr{G}_1$ 都是 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的开稠集．

对于紧流形 M 上的微分同胚，我们平行地给出以下定义与命题．

定义 若点 $p\in M$ 是微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的不动点，且 $Df(p):T_pM\to T_pM$ 不以 1 为特征值，则称 p 为 f 的**初等不动点**．如果进而 $Df(p)$ 没有模为 1 的特征值，则称 p 为 f 的**双曲不动点**．

注：为了联系向量场的简单奇点，双曲奇点与微分同胚的初等不动点，双曲不动点，可以考虑系统 $\dot{x}=X(x)$，它以 p 为奇点．记此系统的流为 $\varphi(t,x)$．取定 $T(T\neq 0)$ 之后，映射 $f(x)=\varphi(T,x)$ 就以 p 为不动点．

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x)=X(\varphi(t,x))$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_x\varphi(t,x)=DX|_{\varphi(t,x)}D_x\varphi(t,x).$$

于是 $D_x\varphi(t, p)$ 满足线性方程

$$\frac{d}{dt} D_x\varphi(t, p) = DX(p) \cdot D_x\varphi(t, p).$$

所以

$$D\varphi(T, p) = e^{DX(p)\cdot T},$$

即有

$$Df(p) = e^{TDX(p)}.$$

命题 4.3 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$，p 是 f 的初等不动点，则存在 f 的一个邻域 $\mathscr{N} \subset \mathrm{Diff}^r(M)$，$p$ 的一个邻域 $U \subset M$ 与唯一的连续映射 $\rho: \mathscr{N} \to U$，使得对任意微分同胚 $g \in \mathscr{N}$，都在 U 内存在唯一一个初等不动点 $\rho(g)$. 从而，初等不动点是孤立的.

令 $G_0 \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 是由一切不动点都是初等不动点的微分同胚全体组成的集合. $G_1 \subset G_0$ 是由一切不动点都是双曲不动点的微分同胚全体组成的集合.

命题 4.4 G_0, G_1 都是 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的开稠集.

§4.2 Hartman 定理

Hartman 定理指出，一个微分同胚 f 在其双曲不动点附近局部拓扑共轭于它的线性部分，即它的导算子. 类似地，Hartman-Grobman 定理指出，一个向量场 X 在其双曲奇点附近局部拓扑等价于它的线性部分.

定理 4.5 (Hartman 定理) 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)(r \geq 1)$，$p \in M$ 是 f 的双曲不动点，$A = Df(p): T_pM \to T_pM$ 是 f 在 p 的导算子，则存在点 p 的邻域 $V(p) \subset M$，原点 O 的邻域 $U(0) \subset T_p(M)$ 与一个同胚 $h: U \to V$，使得

$$h \circ A = f \circ h.$$

由于讨论的是局部性质，通过取局部坐标卡可认为 f 是从 Banach 空间 E 到 E 的同胚，不动点 p 是原点 O. 为证此定理先证三

个引理.

引理 1 设 E 是 Banach 空间, $L \in \mathscr{L}(E)$, 满足 $\|L\| \leqslant a < 1$, $G \in \mathscr{L}(E)$ 是同构, $\|G^{-1}\| \leqslant a < 1$, 则

(a) $I + L$ 是同构, 且 $\|(I + L)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - a}$;

(b) $I + G$ 是同构, 且 $\|(I + G)^{-1}\| \leqslant \frac{a}{1 - a}$.

证明 (a) 给定 $y \in E$, 令 $u(x) = y - L(x)$, 由此定义一映射 $u: E \to E$. 显然

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant a|x_1 - x_2|,$$

即 u 是压缩映射, 从而 u 有唯一不动点 $x \in E$, 使

$$x = u(x) = y - L(x).$$

所以对 $\forall y \in E$, 存在唯一 $x \in E$, 使

$$y = x + L(x),$$

即 $I + L$ 是同构.

考虑 $y \in E$, $|y| = 1$. 令 $x \in E$, 使

$$(I + L)^{-1} y = x.$$

因为 $x + Lx = y$, 于是

$$|x| - a|x| \leqslant 1,$$

从而

$$|x| \leqslant \frac{1}{1 - a}.$$

我们得到了

$$\|(I + L)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - a}.$$

(b) 显然

$$I + G = G(I + G^{-1}).$$

因为 $\|G^{-1}\| \leqslant a < 1$, 由(a)得知 $I + G^{-1}$ 可逆, 因此, $I + G$ 可逆, 且

$$(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1} \cdot G^{-1},$$

从而得到

$$\|(I+G)^{-1}\| \leqslant \|(I+G^{-1})^{-1}\| \cdot \|G^{-1}\| \leqslant \frac{a}{1-a}. \blacksquare$$

由定理假设，$A = Df(0)$ 是双曲线性自同构，根据定理 1.15，存在空间 E 的一个等价范数 $|\cdot|$，E 的一个直和分解 $E = E^s \oplus E^u$，使得 E^s，E^u 对 A 不变。令

$$A^s = A|E^s, \quad A^u = A|E^u,$$

有

$$\|A^s\| \leqslant a < 1, \quad \|(A^u)^{-1}\| \leqslant a < 1.$$

令 $C_b^0(E)$ 是从 Banach 空间 E 到 E 的有界连续映射 u 所组成的 Banach 空间，其中范数规定为：

$$\|u\|_b = \sup_{x \in E} \{|u(x)|\}.$$

因为 $E = E^s \oplus E^u$，所以，$C_b^0(E)$ 可作如下的分解：

$$C_b^0(E) = C_b^0(E, E^s) \oplus C_b^0(E, E^u).$$

对 $\forall u \in C_b^0(E)$，$u = u^s + u^u$，其中

$$u^s = \pi_s \circ u, \quad u^u = \pi_u \circ u,$$

而 π_s, π_u 分别是投影 $\pi_s: E \to E^s$，$\pi_u: E \to E^u$。

引理 2 存在一个正数 $\varepsilon > 0$，当 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b^0(E)$，都是 Lipschitz 映射，且 Lip 常数 $K \leqslant \varepsilon$ 时，$A + \varphi_1$ 与 $A + \varphi_2$ 拓扑共轭。

证明 首先注意，ε 充分小，$\varepsilon < 1/\|A^{-1}\|$ 时，$A + \varphi_1$ 与 $A + \varphi_2$ 是 E 上的同胚。

(1) 我们需要证明，可以找到一个同胚 $h: E \to E$，使得方程

$$h \circ (A + \varphi_1) = (A + \varphi_2) \circ h$$

成立. 为此考虑形式如下的 h: $h = I + u$，I 是恒同映射，$u \in C_b^0(E)$，从而 u 应满足等价的方程：

$$A \circ u - u \circ (A + \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2 \circ (I + u).$$

(2) 定义线性算子 $L: C_b^0(E) \to C_b^0(E)$，

$$Lu = A \circ u - u \circ (A + \varphi_1).$$

我们来证明：L 可逆，且

$$|||L^{-1}||| \leqslant \|A^{-1}\|/(1-a),$$

其中范数 $|||\cdot|||$ 是由 $C_b^0(E)$ 中范数 $\|\cdot\|_b$ 导出的 $C_b^0(E)$ 上的算子的模。

先将 L 表为 $L = \bar{A} \circ L^*$，其中

$$\bar{A}: C_b^0(E) \to C_b^0(E), \quad \bar{A}(u) = A \circ u,$$

$$L^*: C_b^0(E) \to C_b^0(E), \quad L^* u = u - A^{-1} \circ u \circ (A + \varphi_1),$$

$\bar{A}$ 与 L^* 也是线性的。显然 $\bar{A}$ 可逆，

$$\bar{A}^{-1}(u) = A^{-1} \circ u.$$

且由不等式

$$\|\bar{A}^{-1} u\|_b \leqslant \|A^{-1}\| \|u\|_b$$

得知

$$|||\bar{A}^{-1}||| \leqslant \|A^{-1}\|.$$

因此为证 L 可逆只需证明 L^* 可逆。

为证 L^* 可逆，注意 $C_b^0(E, E^s)$ 与 $C_b^0(E, E^u)$ 都是 L^* 不变的（因 E^s, E^u 是 A^{-1} 不变的），因此可以分解 L^* 如下：

$$L^* = L^{*s} + L^{*u},$$

其中

$$L^{*s} = L^* | C_b^0(E, E^s), \quad L^{*u} = L^* | C_b^0(E, E^u).$$

L^{*s} 有逆。这是因为，算子

$$u^s \longmapsto A^{-1} \circ u^s \circ (A + \varphi_1)$$

可逆，其逆算子

$$u^s \longmapsto A^s \circ u^s \circ (A + \varphi_1)^{-1}$$

的算子模 $\leqslant \|A^s\| \leqslant a < 1$，由引理 1(b)，$L^{*s}$ 可逆且

$$|||(L^{*s})^{-1}|||^s \leqslant \frac{a}{1-a}.$$

类似地，由引理 1(a)得算子 L^{*u} 可逆，且

$$|||(L^{*u})^{-1}|||^u \leqslant \frac{1}{1-a}.$$

注意由定理 1.15 得到的 E 中等价范数规定当

$$x = x^s + x^u, \quad x^s \in E^s,\ x^u \in E^u$$

时，$|x| = \max(|x^s|^s, |x^u|^u)$，所以线性算子 L^* 可逆，且

$$|||(L^*)^{-1}||| \leqslant \max(|||(L^{*s})^{-1}|||^s, |||(L^{*u})^{-1}|||^u)$$

$$\leqslant \frac{1}{1-a}.$$

因为 $L = \bar{A} \circ L^*$，得 $L^{-1} = L^{*-1} \circ \bar{A}^{-1}$. L^{-1} 是线性算子，且

$$|||L^{-1}||| \leqslant |||L^{*-1}||| \cdot |||\bar{A}^{-1}||| \leqslant \|A^{-1}\|/(1-a).$$

(3) 证明：当 $\varepsilon < \dfrac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ 时，映射 $\mu: C_b^0(E) \to C_b^0(E)$,

$$\mu(u) = L^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2 \circ (I + u))$$

有唯一不动点 $u \in C_b^0(E)$.

因为对 $\forall u_1, u_2 \in C_b^0(E)$，有

$$\|\mu(u_1) - \mu(u_2)\|_b = \|L^{-1}[\varphi_2 \circ (I + u_2) - \varphi_2 \circ (I + u_1)]\|_b$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|(1-a)^{-1}\varepsilon\|u_1 - u_2\|_b,$$

所以当 $\varepsilon < \dfrac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ 时，μ 是压缩映射. 因此在空间 $C_b^0(E)$ 中 μ 有唯一不动点 u.

(4) 总结(2)与(3)得知，当 $\varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1}(1-a)$ 时，存在唯一的 $u \in C_b^0(E)$，使

$$u = \mu(u) = L^{-1}[\varphi_1 - \varphi_2 \circ (I + u)],$$

即使得

$$A \circ u - u \circ (A + \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2 \circ (I + u).$$

亦即存在 $u \in C_b^0(E)$，使

$$(I + u) \circ (A + \varphi_1) = (A + \varphi_2) \circ (I + u).$$

(5) 验证 $I + u$ 是同胚.

我们可以用同样的方法证明，存在唯一的 $v \in C_b^0(E)$，使

$$(I + v) \circ (A + \varphi_2) = (A + \varphi_1) \circ (I + v)$$

成立. 下面来证等式

$$(I+u)(I+v)=(I+v)(I+u)=I.$$

这是因为,显然有

$$(I+u)(I+v)(A+\varphi_2)=(I+u)(A+\varphi_1)(I+v)$$
$$=(A+\varphi_2)(I+u)(I+v).$$

记

$$(I+u)(I+v)=I+w,$$

其中

$$w=v+u(I+v)\in C_b^0(E).$$

上式成为

$$(I+w)(A+\varphi_2)=(A+\varphi_2)(I+w).$$

另外,上面已证,方程

$$(I+u)(A+\varphi_1)=(A+\varphi_2)(I+u)$$

对于满足定理要求的 φ_1,φ_2 有唯一解 $u\in C_b^0(E)$. 而当 $\varphi_1=\varphi_2$ 时,应有解 $u=0$. 所以 $w=0$, 即

$$(I+u)(I+v)=I.$$

类似地可证

$$(I+v)(I+u)=I.$$

这就证明了 $I+u$ 是同胚.

总之,引理 2 中之 $\varepsilon<(1-a)\|A^{-1}\|^{-1}$ 即可. ▮

引理 3 对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\varphi\in C_b^0(E)$ 具有 Lip 常数$\leqslant\varepsilon$ 与原点 O 的一个邻域 U,使在 U 上,

$$f=A+\varphi\ (A=\mathrm{D}f(0)).$$

证明 令 $\alpha:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是 C^∞ 函数,具有以下性质:

(i) 当 $t\geqslant 1$ 时, $\alpha(t)=0$;

(ii) 当 $t\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $\alpha(t)=1$;

(iii) 对 $\forall t\in\boldsymbol{R}$, $|\alpha'(t)|<K$, $K>2$. 从而对 $\forall t\in\boldsymbol{R}$, $|\alpha(t)|\leqslant K$.

将 f 表为 $A+\phi$,则

$$\phi(0)=0, \quad D\phi(0)=0.$$

取球心在原点，半径为 $r>0$ 的球 B_r，使得对 $\forall x\in B_r$，

$$\|D\phi(x)\|<\varepsilon/2K.$$

定义一个映射 $\varphi:E\to E$，

$$\varphi(x)=\alpha\left(\frac{|x|}{r}\right)\phi(x),$$

φ 就满足引理的要求。

首先，若 $|x_1|,|x_2|\leqslant r$，则有

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| &= \left|\alpha\left(\frac{|x_1|}{r}\right)\phi(x_1)-\alpha\left(\frac{|x_2|}{r}\right)\phi(x_2)\right| \\ &\leqslant \left|\left[\alpha\left(\frac{|x_1|}{r}\right)-\alpha\left(\frac{|x_2|}{r}\right)\right](\phi(x_1)-\phi(0))\right| \\ &\quad + \left|\alpha\left(\frac{|x_2|}{r}\right)[\phi(x_1)-\phi(x_2)]\right| \\ &\leqslant K\frac{|x_1-x_2|}{r}\frac{\varepsilon}{2K}|x_1|+K\frac{\varepsilon}{2K}|x_1-x_2| \\ &\leqslant \varepsilon|x_1-x_2|;\end{aligned}$$

若 $|x_1|\leqslant r$，$|x_2|>r$，则存在 x_2'，

$$|x_2'|=r, \quad |x_1-x_2'|\leqslant|x_1-x_2|.$$

因为 $\varphi(x_2)=\varphi(x_2')=0$，所以

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=|\varphi(x_1)-\varphi(x_2')|&\leqslant\varepsilon|x_1-x_2'| \\ &\leqslant\varepsilon|x_1-x_2|;\end{aligned}$$

若 $|x_1|,|x_2|\geqslant r$，则

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=0\leqslant\varepsilon|x_1-x_2|.$$

总之，φ 有 Lip 常数 $\leqslant\varepsilon$。

其次，取原点 O 的邻域 $U=B_{\frac{r}{2}}$，则因为当 $|x|<\dfrac{r}{2}$ 时，$\varphi(x)=\phi(x)$，所以在 U 上 $f=A+\varphi$。▌

定理 4.5 的证明 令 ε 如引理 2 中所取，根据引理 3，存在原点 O 的一个邻域 U 与一个 $\varphi\in C_b^0(E)$，φ 的 Lip 常数 $\leqslant\varepsilon$，使在 U

上 $f=A+\varphi$. 由引理 2,存在同胚 $h:E\to E$,使
$$h\circ A=(A+\varphi)\circ h.$$
因此,在U上
$$h\circ A=f\circ h. \quad \blacksquare$$

Hartman 定理联系到类似于命题 4.3 的关于双曲不动点的结果与定理 1.22 立刻得到:

推论 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant 1)$, $p\in M$ 是 f 的双曲不动点,则 f 在 p 局部结构稳定.

定理 4.6 (Hartman--Grobman 定理) 设原点O是向量场 $X\in \mathscr{X}^r(\boldsymbol{R}^n)$ 的双曲奇点,则存在点O的一个邻域 $U\subset \boldsymbol{R}^n$, U 上的一个同胚 h, 局部地将系统 $\dot{x}=X(x)$ 的流 φ_t 的轨道保方向地映成线性系统
$$\dot{\xi}=\mathrm{D}X(0)\xi$$
的流 $e^{t\mathrm{D}X(0)}$ 的轨道.

证明参看[2].

§4.3 双曲不动点的稳定流形定理

定义 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$, $p\in M$ 是 f 的双曲不动点,则称集合
$$W^s(p)=\{q\in M\,|\,f^n(q)\to p, \text{ 当 } n\to\infty\}$$
为 f 在 p 的**稳定流形**. 称集合
$$W^u(p)=\{q\in M\,|\,f^{-n}(q)\to p, \text{ 当 } n\to\infty\}$$
为 f 在 p 的**不稳定流形**.

此处称此集合为流形,下面的定理证明此集合确是流形.

例 1 若A是$\boldsymbol{R}^m$上的双曲线性自同构,则$\boldsymbol{R}^m$可直和分解如下:
$$\boldsymbol{R}^m=E^s\oplus E^u,$$
使 $q\in E^s$ 时,
$$A^n(q)\to 0, \quad \text{当 } n\to\infty;$$

$q\in E^u$ 时，

$$A^{-n}(q)\to 0,\quad 当\ n\to\infty.$$

对于其它 $q\neq 0$，则当 $n\to+\infty$ 或 $n\to-\infty$ 时有 $|A^n(q)|\to\infty$。所以 A 在不动点 O 的稳定流形 $W^s(O)=E^s$，不稳定流形 $W^u(O)=E^u$ 都是 R^m 的子空间。

例 2 由矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

导出的二维环面 T^2 上的双曲线性自同构在双曲不动点 O 的稳定流形

$$W^s(0)=\left\{([x],\ [y])\in T^2\,\middle|\,y=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}x\right\},$$

不稳定流形

$$W^u(O)=\left\{([x],[y])\in T^2\,\middle|\,y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right\}$$

都是 T^2 上的稠集。

定义 设 $U\subset M$ 是 p 的一个邻域，称集合

$$W_U^s(p)=\{q\in M\,|\,f^n(q)\in U,\ \forall n\geqslant 0\}$$

为 f 在 p 对邻域 U 的**局部稳定流形**；称集合

$$W_U^u(p)=\{q\in M\,|\,f^{-n}(q)\in U,\ \forall n\geqslant 0\}$$

为 f 在 p 对邻域 U 的**局部不稳定流形**。

注 1：对于充分小的邻域 U，

$W_U^s(p)=\{q\in M\,|\,f^n(q)\in U,\ n\geqslant 0$ 且 $f^n(q)\to p$，当 $n\to\infty\}$，从而 $W_U^s(p)\subset W^s(p)$。关于 $W_U^u(p)$ 有类似的结果。

"$\supset$"是显然的。"$\subset$"关系成立由 Hartman 定理得到。根据 Hartman 定理，存在点 p 的邻域 $U(p)\subset M$，原点 O 的邻域 $V(O)\subset T_pM$ 与同胚 $h:V(O)\to U(p)$ 使 $h\circ A=f\circ h$。所以只要 U 充分小，$U\subset U(p)$，如果点 $q\in W_U^s(p)$（即 $f^n(q)\in U$，$\forall n\geqslant 0$），令 $a=h^{-1}(q)$，就有 $a\in V(O)$，且

$$A^n a = A^n h^{-1}(q) = h^{-1}(f^n(q)) \in V(0), \quad 对\ \forall n \geqslant 0.$$

从而 $a \in E^s$, $A^n a \to 0$，当 $n \to \infty$. 由此得到

$$f^n(q) = f^n h(a) = hA^n a \to h(O) = p, \quad 当\ n \to \infty.$$

即 q 属于等式右端之集合. "$\subset$"成立.

由注 1 的讨论得知：取 $r > 0$ 充分小，使原点 O 为心 r 为半径的小球 $B_r \subset V(O)$，又令 $U = h(B_r)$，于是 $\forall a \in B_r$，使 $A^n a \in B_r$ 且 $A^n a \to 0$，当 $n \to \infty$，即

$$a \in E^s \Longleftrightarrow q = h(a) \in W_U^s(p).$$

即有

注 2：$W_U^s(p) = h(B_r \cap E^s)$，$W_U^u(p) = h(B_r \cap E^u)$.

下面先讨论局部稳定流形. 不妨设 f 是定义在 Banach 空间 E 上的微分同胚，且 f 以原点 O 为双曲不动点. 令 $A = Df(0)$，则 A 是双曲线性自同构，于是 E 可直和分解为

$$E = E^s \oplus E^u,$$

E^s, E^u 在 A 作用下不变. 对 $\forall x \in E$，记

$$x = (x_s,\ x_u), \quad x_s \in E^s,\ x_u \in E^u,$$

在 E 上的范数

$$|x| = \max\{|x_s|_s,\ |x_u|_u\}.$$

$$|x_s| = |x_s|_s, \quad |x_u| = |x_u|_u.$$

$$A|E^s = A^s, \quad A|E^u = A^u.$$

$$\|A^s\| \leqslant a < 1, \quad \|(A^u)^{-1}\| \leqslant a < 1.$$

我们称 a 为 f 在点 O 的**斜度**.

下面总以 B_β 表示 E 中以原点 O 为心 β 为半径的球，又令

$$B_\beta^s = B_\beta \cap E^s, \quad B_\beta^u = B_\beta \cap E^u.$$

将 f 表为 $f = A + \eta$，因 f 是 C^r 的，

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = A,$$

所以 η 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 的，

$$\eta(0) = 0, \quad D\eta(0) = 0.$$

因 $D\eta$ 连续，所以，对给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists\ \beta > 0$，使在原点的邻域

B_β 内

$$\|D\eta\| < \varepsilon,$$

从而在 B_β 内 η 是 Lipschitz 的，且 Lip 常数 $< \varepsilon$。

以下出现的 ε, β 如上所述，又设 $\varepsilon < 1 - a$。

引理 对 $\forall z \in E$, $z = (x, y)$, $x \in E^s$, $y \in E^u$,

$$|z| = \max(|x|, |y|).$$

设

$$z_0 = (x_0, y_0), \quad z^0 = (x^0, y^0) \in W^s_\beta(O) = W^s_{B_\beta}(O),$$
$$z_n = f^n(z_0) = (x_n, y_n), \quad z^n = f^n(z^0) = (x^n, y^n),$$

则有以下结论

(a) 若对某 m，不等式

$$|y^m - y_m| \geqslant |x^m - x_m|$$

成立，则对一切 $k = m + 1, m + 2, \cdots$，有不等式

$$|y^k - y_k| \geqslant |x^k - x_k|$$

与

$$|y^k - y_k| \geqslant \left(\frac{1}{a} - \varepsilon\right)^{k-m} |y^m - y_m|.$$

(b) 若对某个 n，不等式

$$|y^n - y_n| < |x^n - x_n|$$

成立，则对一切 $k = 0, 1, \cdots, n$ 有

$$|y^k - y_k| < |x^k - x_k| \leqslant (a + \varepsilon)^k |x^0 - x_0|.$$

证明 (a) 因为 $|y^m - y_m| \geqslant |x^m - x_m|$，所以

$$|z^m - z_m| = |y^m - y_m|.$$

由于

$$z^{m+1} - z_{m+1} = f(z^m) - f(z_m) = Az^m + \eta z^m - Az_m - \eta z_m,$$

注意 $z^n, z_n \in W^s_\beta(O)$ 就得到

$$\begin{aligned}|x^{m+1} - x_{m+1}| &\leqslant |A^s x^m - A^s x_m| + |\pi_s(\eta z^m - \eta z_m)| \\ &\leqslant a|x^m - x_m| + \varepsilon|z^m - z_m| \\ &\leqslant (a + \varepsilon)|y^m - y_m|\end{aligned}$$

与

$$|y^{m+1}-y_{m+1}|\geqslant|A^u y^m-A^u y_m|-|\pi_u(\eta z^m-\eta z_m)|$$
$$\geqslant\frac{1}{a}|y^m-y_m|-\varepsilon|z^m-z_m|$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{a}-\varepsilon\right)|y^m-y_m|.$$

合起来，就有

$$|y^{m+1}-y_{m+1}|\geqslant\left(\frac{1}{a}-\varepsilon\right)\frac{1}{a+\varepsilon}|x^{m+1}-x_{m+1}|.$$

因为 $\varepsilon<1-a$ 时，$\varepsilon<\frac{1}{2}(a^{-1}-a)$，所以

$$|y^{m+1}-y_{m+1}|\geqslant|x^{m+1}-x_{m+1}|.$$

上面已有

$$|y^{m+1}-y_{m+1}|\geqslant\left(\frac{1}{a}-\varepsilon\right)|y^m-y_m|.$$

总之，我们已证明了 $k=m+1$ 时结论(a)成立。对 $k=m+2$，…可类推。

(b) 由(a)立刻得到，对一切 $k=0,\cdots,n$，

$$|y^k-y_k|<|x^k-x_k|,$$

从而

$$|z^k-z_k|=|x^k-x_k|.$$

于是

$$|x^k-x_k|\leqslant|A^s x^{k-1}-A^s x_{k-1}|+|\pi_s(\eta z^{k-1}-\eta z_{k-1})|$$
$$\leqslant(a+\varepsilon)|x^{k-1}-x_{k-1}|.$$

依此类推得到结论(b)。 ▮

推论 1 当 $z,z'\in W^s_\delta(O)$ 时，存在常数 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$|f^n(z)-f^n(z')|\leqslant\lambda^n|z-z'|.$$

证明 令 $z_n=f^n(z)$，$z'_n=f^n(z')$，$z_n=(x_n,y_n)$，$z'_n=(x'_n,y'_n)$。若 $\exists\ n_k\to+\infty$，使

$$|y_{n_k}-y'_{n_k}|<|x_{n_k}-x'_{n_k}|,$$

则由引理结论(b)得，对一切 $n(n=1,2,\cdots)$，

$$|x_n - x'_n| \leqslant (a+\varepsilon)^n |x - x'|,$$

即

$$|z_n - z'_n| \leqslant (a+\varepsilon)^n |z - z'|.$$

因 $\varepsilon < 1-a$，取 $\lambda = a+\varepsilon$ 就有 $\lambda \in (0,1)$. 推论中的不等式得证.

否则，$\exists\ k_0$，使当 $k \geqslant k_0$ 时，

$$|y_k - y'_k| \geqslant |x_k - x'_k|.$$

由引理结论(a)得，对 $k \geqslant k_0$，有

$$|y_{k_0} - y'_{k_0}| \leqslant \frac{1}{(a^{-1}-\varepsilon)^{k-k_0}} |y_k - y'_k| \leqslant \frac{2\beta}{(a^{-1}-\varepsilon)^{k-k_0}},$$

因 $\varepsilon < 1-a$ 时有 $a^{-1}-\varepsilon > 1$，令 $k \to \infty$ 就得到 $y_{k_0} = y'_{k_0}$. 从而有

$$x_{k_0} = x'_{k_0}, \quad z_{k_0} = z'_{k_0}.$$

所以 $z = z'$. 推论中的不等式显然成立. ∎

推论 2 我们有

$$W^s_\beta(O) = \{q \in E \mid f^n(q) \in B_\beta, \forall n \geqslant 0;\ f^n(q) \to 0,\ n \to \infty\},$$

从而 $W^s_\beta(O) \subset W^s(O)$.

证明 这是注 1 中应用 Hartman 定理已经得到过的结果，现在由推论 1 立刻得到. ∎

定理 4.7(局部稳定流形定理) 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)(r \geqslant 1)$，原点$O$是 f 的双曲不动点，$A = \mathrm{D}f(O)$，在原点邻域 B_β 上，$f = A + \eta$，$\eta: B_\beta \to E$ 是 C^r 映射，$\eta(O) = 0, \mathrm{D}\eta(O) = 0, \|\mathrm{D}\eta\| < \varepsilon\ (\varepsilon < 1-a)$，则存在 $\beta' \in (0,\beta)$ 与 C^r 映射 $h: B^s_{\beta'} \to B^u_\beta$，使 h 的图像

$$\Gamma = \{(x, h(x)) \mid x \in B^s_{\beta'}\}$$

是 f 在原点O对邻域B的稳定流形 $W^s_B(O)$，其中

$$B = B^s_{\beta'} \times B^u_\beta.$$

证明 (1) 令 K 是 Banach 空间E中收敛于O的序列的全

体，在上界范数下构成的 Banach 空间，即

$$K = \{\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geq 0} | \gamma_n \in E,\ r_n \to 0,\ 当\ n \to \infty\}.$$

γ 的范数为

$$\|\gamma\| = \sup_n |\gamma_n|.$$

令 G 是 $B_\beta \subset E$ 中收敛于 O 的序列的全体组成的集合．显然 $G \subset K$.

注意，如果 $\gamma = \{\gamma_n = f^n(z)\} \in G$，则 $z \in W^s_\beta(O)$；反之，如果 $z \in W^s_\beta(O)$，则由引理的推论 2，$\{f^n(z)\} \in G$．总之，

$$z \in W^s_\beta(O) \Longleftrightarrow \gamma = \{\gamma_n = f^n(z)\} \in G.$$

我们先来分析 $\{\gamma_n = f^n(z)\}$的性质：

$$\begin{aligned}\gamma_n &= f^n(z) = f(f^{n-1}(z)).\\ &= Af^{n-1}(z) + \eta(\gamma_{n-1})\\ &= A(A+\eta)f^{n-2}(z) + \eta(\gamma_{n-1})\\ &= A^2f^{n-2}(z) + A\eta(\gamma_{n-2}) + \eta(\gamma_{n-1})\\ &= A^n z + A^{n-1}\eta(\gamma_0) + \cdots + A\eta(\gamma_{n-2}) + \eta(\gamma_{n-1})\\ &= A^n z + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\eta(\gamma_i).\end{aligned}$$

将 γ_n 与 $\eta(\gamma_i)$ 按子空间 E^s, E^u 分解：记

$$\gamma_n = (\gamma^s_n, \gamma^u_n), \quad \eta(r_i) = (\eta^s(\gamma_i), \eta^u(\gamma_i)),$$

于是

$$\gamma^u_n = (A^u)^n \left(z^u + \sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{-1-i}\eta^u(\gamma_i) \right).$$

如果 $\gamma \in G$，则 γ^u_n 有界，而 $\|(A^u)^{-1}\| \leqslant a < 1$，所以，当 $n \to \infty$ 时，

$$z^u + \sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{-1-i}\eta^u(\gamma_i) \to 0,$$

即有

$$z^u = -\sum_{i=0}^{\infty} (A^u)^{-1-i}\eta^u(\gamma_i),$$

经过以上分析，我们定义映射 $F_n: B^s_\beta \times G \to E = E^s \oplus E^u$ 如下：

$F_n(x, \gamma)$

$$=\left((A^s)^n x + \sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\eta^s(\gamma_i),\ -\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}\eta^u(\gamma_i)\right),$$

$$n = 0, 1, \cdots.$$

考虑 $F_n(x, \gamma)$ 的第二个分量。

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}\eta^u(\gamma_i)\right| \leqslant \left(\sum_{i=n}^{\infty}\|(A^u)^{-1}\|^{i+1-n}\right)\sup_{i\geqslant n}|\eta^u(\gamma_i)|$$

$$\leqslant (1-a)^{-1}\sup_{i\geqslant n}|\eta^u(\gamma_i)|.$$

由于 $\gamma \in G$，$\gamma_n \to 0$，所以，对任给的 $\delta > 0$，$\exists n_0$，当 $i \geqslant n_0$ 时，

$$|\eta(\gamma_i)| < (1-a)\delta,$$

即 $n \geqslant n_0$ 时不等式右端$<\delta$。所以，$n \to \infty$ 时 $F_n(x, \gamma)$ 的第二个分量趋于零。再考虑 $F_n(x, \gamma)$ 的第一个分量。显然当 $n \to \infty$ 时，$(A^s)^n x \to 0$。令 $0 \leqslant m < n$，分其余各项为两部分

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\eta^s(\gamma_i)\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{m-1}\right| + \left|\sum_{i=m}^{n-1}\right|,$$

第二部分用类似于上面的方法估计，估计第一部分时注意 $|\gamma_i| < \beta$，所以 $\eta(\gamma_i)$ 有界 b。于是

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\eta^s(\gamma_i)\right| \leqslant a^{n-m}b + (1-a)^{-1}\sup_{i\geqslant m}|\eta(\gamma_i)|.$$

对于任意给的 $\delta > 0$，取 m 充分大使后一项$<\dfrac{\delta}{2}$，再取 n 充分大使前一项$<\dfrac{\delta}{2}$。所以 $F_n(x, \gamma)$ 的第一个分量当 $n \to \infty$ 时也趋于零。总之 $\{F_n(x, \gamma)\} \in K$。

令 $F(x, \gamma) = \{F_n(x, \gamma)\}$，则 F 是 $B^s_\beta \times G \to K$ 的映射。

(2) 对 $x \in B^s_\beta$，$\gamma \in G$，$\exists\ y \in B^u_\beta$ 使

$$\gamma_n = f^n(x, y) \Longleftrightarrow \gamma = F(x, \gamma),$$

即 $\gamma_n = F_n(x, \gamma)$。

"$\Longrightarrow$"：(1)中已证。

"$\Longleftarrow$"：取 $y = -\sum_{i=0}^{\infty}(A^u)^{-1-i}\eta^u(\gamma_i)$。因 $\|(A^u)^{-1}\| \leqslant a < 1$，$\varepsilon < 1 - a$，$\|\gamma\| < \beta$，所以

$$|y| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1}|\eta(\gamma_i)| \leqslant \frac{a}{1-a}\varepsilon\|\gamma\| < \beta,$$

即 $y \in B^u_\beta$。下面用归纳法验算 y 使 $\gamma_n = f^n(x,y)$ 成立。

显然，$n = 0$ 时有

$$\gamma_0 = F_0(x, \gamma) = (x, y) \equiv f^0(x, y).$$

若当 $n = k$ 时有 $\gamma_k = f^k(x, y)$，则当 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1} &= F_{k+1}(x, \gamma) \\
&= \Big(A^s\Big[(A^s)^k x + \sum_{i=0}^{k-1}(A^s)^{k-1-i}\eta^s(\gamma_i)\Big] + \eta^s(\gamma_k), \\
&\qquad - A^u\sum_{i=k}^{\infty}(A^u)^{k-1-i}\eta^u(\gamma_i) + \eta^u(\gamma_k)\Big) \\
&= (A^s(\gamma_k^s) + \eta^s(\gamma_k),\ A^u(\gamma_k^u) + \eta^u(\gamma_k)) \\
&= f(\gamma_k) = f^{k+1}(x, y).
\end{aligned}$$

(3) 用隐函数定理证明：存在 C^r 映射 $\phi: B^s_{\beta'} \to G_1$，其中 $B^s_{\beta'} \subset B^s_\beta$，$G_1 \subset G$，使

$$F(x, \phi(x)) = \phi(x).$$

考虑 $\Phi(x,\gamma) = \gamma - F(x, \gamma)$，映射 $\Phi: B^s_\beta \times G \to K$。显然

$$\Phi(0,0) = 0,\ D_2\Phi(0,0) = I - D_2F(0,0).$$

为计算 $D_2F(x, \gamma): K \to K$，先证 $D_2F_n(x, \gamma): K \to E$ 可逐项求导，即

$$\begin{aligned}
&D_2F_n(x, \gamma)(u) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}D\eta^s(\gamma_i)(u_i),\ -\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}D\eta^u(\gamma_i)(u_i)\Big).
\end{aligned}$$

记上式右端为 λ，只要证，对任给 $\delta>0$，当 $u\in K$，$\|u\|$ 充分小时，以下不等式成立：

$$|F_n(x,\gamma+u)-F_n(x,\gamma)-\lambda|\leqslant\delta\|u\|.$$

事实上，

$$\begin{aligned}&|F_n(x,\gamma+u)-F_n(x,\gamma)-\lambda|\\&\quad\leqslant\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}[\eta^s(\gamma_i+u_i)-\eta^s(\gamma_i)-D\eta^s(\gamma_i)(u_i)]\right|\\&\qquad+\left|\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}[\eta^u(\gamma_i-u_i)-\eta^u(\gamma_i)-D\eta^u(\gamma_i)(u_i)]\right|.\end{aligned}$$

因为 $D\eta$ 在 B_β 上连续，所以在 $\bar{B}_\alpha\,(\alpha<\beta)$ 上一致连续．于是对任给的 $\delta'>0$，$\exists\rho>0$，使得当 $z\in\bar{B}_\alpha$，$|w|<\rho$ 且 $z+w\in\bar{B}_\alpha$ 时，

$$\|D\eta(z+w)-D\eta(z)\|<\delta'.$$

由中值公式，

$$\eta(z+w)-\eta(z)=D\eta(z+\theta w)w\ \ (0<\theta<1).$$

所以

$$|\eta(z+w)-\eta(z)-D\eta(z)w|\leqslant\delta'|w|.$$

由此可见，当 $\|u\|<\rho$ 时，上面待估的两个模的任何一个都不超过 $\dfrac{1}{1-a}\delta'\|u\|$.

总之，对给定的 $\delta>0$，取 $\delta'>0$，使 $\delta'<(1-a)\delta/2$，对 δ' 有 $\rho>0$，当 $\|u\|<\rho$ 时，所要证明的不等式成立．

应用得到的不等式，进一步得到

$$\begin{aligned}&\|F(x,\gamma+u)-F(x,\gamma)-\{D_2F_n(x,\gamma)u\}\|\\&\quad=\sup_{n\geqslant0}|F_n(x,\gamma+u)-F_n(x,\gamma)-D_2F_n(x,\gamma)u|\\&\quad\leqslant\delta\|u\|,\end{aligned}$$

所以立刻有

$$D_2F(x,\gamma)u=\{D_2F_n(x,\gamma)u\}.$$

因为 $D\eta(0)=0$,从而

$$D_2F(0,0)=0,\quad D_2\Phi(0,0)=I.$$

不难直接检验 D_1F 与 D_2F 是连续的，所以Φ是C^1的．总之,$\Phi(x,\gamma)=\gamma-F(x,\gamma)=0$ 满足隐函数存在定理的条件,所以存在(0,0)的一个邻域 $B^s_{\beta'}\times G_1\subset B^s_\beta\times G$ 与一个 C^1映射 ϕ: $B^s_{\beta'}\to G_1$,使得 $\phi(0)=0$,满足

$$F(x,\phi(x))=\phi(x).$$

事实上,由η是 C^r 的,映射ϕ也是 C^r 的.

(4) 定义映射 $h: B^s_{\beta'}\to B^s_\beta$ 为

$$h(x)=(\phi_0(x))^u.$$

因为h是 C^r 映射 $x\longmapsto\phi(x)$, 投影 $\theta:\phi(x)\longmapsto\phi_0(x)$ 与投影 $\pi_u:\phi_0(x)\longmapsto(\phi_0(x))^u$的复合，所以是$C^r$的．显然 $h(0)=0$.

由(2)与(3),$\forall x\in B^s_{\beta'}$,对应的 $h(x)$ 使 $\{f^n(x,h(x))\}\in G$. 由(1)中讨论，$(x,h(x))\in W^s_\beta(0)$, 即h的图像

$$\Gamma=\{(x,h(x))\,|\,x\in B^s_{\beta'}\}\in W^s_\beta(0).$$

另外,如果还有 $x\in B^s_{\beta'}$,$(x,y)\in W^s_\beta(0)$,则根据引理结论(a),由于

$$|y-h(x)|\geqslant 0=|x-x|,$$

可得

$$|y-h(x)|\leqslant\frac{1}{(a^{-1}-\varepsilon)^k}|y^k-y_k|,\quad k=1,2,\cdots.$$

因 y^k-y_k, $k=1,2,\cdots$有界, $a^{-1}-\varepsilon>1$,所以 $y=h(x)$.即若 $x\in B^s_{\beta'}(x,y)\in W^s_\beta(0)$, 则 $(x,y)\in\Gamma$.

又不难验证：记 $(x_1,y_1)=f(x,h(x))$,则有 $|x_1|\leqslant|x|$. 结合以上讨论得知 $f(\Gamma)\subset\Gamma$.

总之，$\Gamma=\{(x,h(x))\,|\,x\in B^s_{\beta'}\}$ 是 f 在原点O对邻域 $B=B^s_{\beta'}\times B^u_\beta$的局部稳定流形．▮

命题 4.8 $Dh(0)=0$,从而局部稳定流形在原点 O 与 A 的稳定子空间 E^s 相切.

证明 因为 $F(x,\psi(x))\equiv\psi(x)$,所以

$$D_1F(x,\psi(x))+D_2F(x,\psi(x))\cdot D\psi(x)=D\psi(x).$$

因 $\psi(0)=0$, $D_2F(0,0)=0$,所以

$$D\psi(0)=D_1F(0,0).$$

因为 $h=\pi_u\circ\theta\circ\psi$, π_u, θ 是线性映射,所以,对 $v\in E^s$,

$$\begin{aligned}Dh(0)v&=\pi_u\circ\theta\circ D\psi(0)\cdot v\\&=\pi_u\circ\theta\circ D_1F(0,0)v\\&=\pi_u(D_1F_0(0,0)v).\end{aligned}$$

而 $F_0(x,0)=(x,0)$,所以

$$F_0(x+v,0)-F_0(x,0)=(x+v,0)-(x,0)=(v,0).$$

即

$$D_1F_0(x,0)v=(v,0).$$

于是

$$Dh(0)v=\pi_u(v,0)=0.$$

这就得到所要证明的结果:

$$Dh(0)=0. \blacksquare$$

下面讨论整体稳定流形.

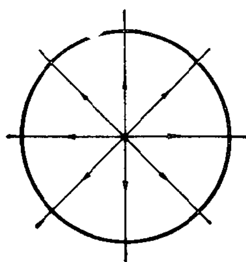
例 3 设 S^2 是二维球面,$f:S^2\to S^2$ 是由下图所表示的流 φ_t 对时间 $t=1$ 导出的微分同胚,即 $f=\varphi_1$. 北半球上有 f 的双曲不动点 p. p 的稳定流形 $W^s(p)$,不稳定流形 $W^u(p)$ 都是∞形,是 S^2 的浸入子流形,不是嵌入子流形(定义见注).

例 4 前面例 2 中指出过,由

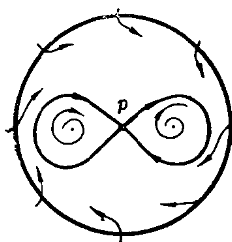
$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

导出的 T^2 上的双曲自同构的 $W^s(O)$ 与 $W^u(O)$ 在 T^2 上稠. 进一步注意到它们都是 T^2 上的浸入子流形,不是嵌入子流形.

注: 浸入子流形与嵌入子流形采用以下定义:



南半球



北半球

图 4.1

设M与N是两个光滑流形，若有光滑映射 $\varphi: M \to N$，满足

(1) φ 是单一的；

(2) 在任一点 $p \in M$，切映射 $D\varphi$: $T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$都是非退化的，则称$(\varphi, M)$是$N$的**浸入子流形**.

例 若 $G(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arcctg} t\right), \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arcctg} t\right)\right)$，则显然 $G: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ 满足(1)与(2)，所以 $(G, \boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的浸入子流形(见图 4.2).

若 $F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$，则显然 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ 不满足(1)，所以$(F, \boldsymbol{R})$不是$\boldsymbol{R}^2$的浸入子流形(见图 4.3).

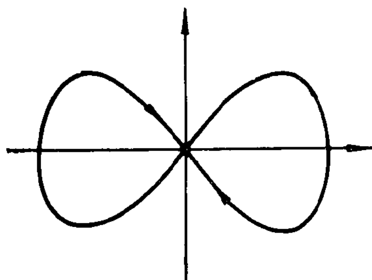


图 4.2

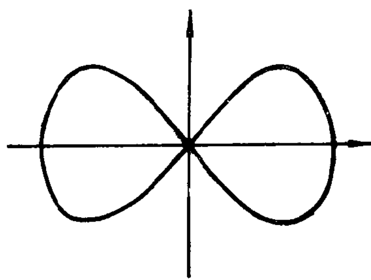


图 4.3

若 (φ, M) 是N的浸入子流形，又如果 $\varphi: M \to \varphi(M) \subset N$

是同胚映射，则称(φ, M)是N的**嵌入子流形.**

显然例 1 中$(G,\mathbf{R})$不是$\mathbf{R}^2$的嵌入子流形.

定理 4.9（稳定流形定理） 设f是紧流形M上的$C^r(r\geqslant 1)$微分同胚，p是f的双曲不动点，则f在点p的稳定流形$W^s(p)$是M的C^r浸入子流形，且在p处与$A=Df(p)$的稳定线性子空间相切.

证明 为证明$W^s(p)$是M的C^r浸入子流形，我们先构造$W^s(p)$的一个C^r地图集（atlas），使它成为一个C^r微分流形. 然后证明包含映射$\tilde{I}: W^s(p)\hookrightarrow M$是一个$C^r$浸入映射.

取不动点$p\in M$的一个邻域卡(U,φ)，使

$$\varphi(U)=B^s_{B'}\times B^u_B$$

（$B^s_{B'}$与B^u_B如定理 4.7 中所述），则集合$\varphi(W^s_U(p))$是$h: B^s_{B'}\to B^u_B$的图像

$$\Gamma=\{(x,h(x))\mid x\in B^s_{B'}\}.$$

为简单起见，采用符号

$$Y_0\equiv W^s_U(p).$$

又令

$$Y_i=f^{-i}(Y_0)\ (i=1,2,\cdots).$$

显然

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}Y_i=\bigcup_{i=0}^{\infty}f^{-i}(Y_0)=W^s(p).$$

所以$\{Y_i,\ i\geqslant 0\}$是$W^s(p)$的覆盖. 在Y_i上定义映射$\varphi_i: Y_i\to B^s_{B'}$，对$\forall y\in Y_i$，令

$$\varphi_i(y)=\pi_s\circ\varphi\circ f^i(y),$$

其中$\pi_s:\varphi(U)\to B^s_{B'}$是到子空间$E^s$的投影.

注意，对任意$i\neq j$，$i>j\geqslant 0$，都有$Y_i\supset Y_j$，从而

$$Y_i\cap Y_j=Y_j,$$

于是

$$\varphi_j(Y_i\cap Y_j)=B^s_{B'},$$

$$\varphi_i(Y_i \cap Y_j) = \pi_s \circ \varphi \circ f^{i-j}(Y_0) \subset B^s_{\delta'}.$$

考虑转移函数

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(Y_i \cap Y_j) \to \varphi_i(Y_i \cap Y_j),$$

$$\varphi_{ij}(x) = \pi_s \circ g^{i-j}(x, h(x)),$$

其中 $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$,所以 φ_{ij} 是 C^r 微分同胚. 其逆转移函数

$$\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(Y_i \cap Y_j) \to \varphi_j(Y_i \cap Y_j),$$

$$\varphi_{ji}(x) = \pi_s \circ g^{j-i}(x, h(x))$$

也是 C^r 微分同胚. 由于 $B^s_{\delta'}$ 是开的,所以 $\varphi_i(Y_i \cap Y_j)$ 是开的,从而 $\varphi_j(Y_i \cap Y_j)$也是开集,因此 $\{(Y_i, \varphi_i), i \geq 0\}$是 $W^s(p)$ 的一个 C^r 地图集.

若 $y \in W^s_U(p)$,视 $y \in U \subset M$, 则卡为 (U, φ); 视 $y \in Y_0 \subset W^s(p)$,则卡为(Y_0, φ_0), $\varphi_0 = \pi_s \circ \varphi$. 故包含映射 $\tilde{I}$ 将$y \in Y_0 \longmapsto y \in U$,所导出的卡中的 C^r 映射为

$$x \in E^s \longmapsto (x, h(x)) \in E.$$

显然此映射的切映射非退化.

对任意 $y \in W^s(p)$,取 i 使 $y \in Y_i$,再将包含映射 $\tilde{I}$ 表为 $f^{-i} \circ \tilde{I} \circ f^i$, 则由上面的讨论与 f 是 C^r 微分同胚得 $\tilde{I}$ 在 y 处的切映射非退化. 至于包含映射 $\tilde{I}: W^s(p) \to M$ 的单一性是显然的. 所以 $(\tilde{I}, W^s(p))$ 是M的 C^r 浸入子流形. ∎

以上结论可以推广到 f 的双曲周期点上.

定义 若 p 是 f 的双曲 k-周期点(即 p 是 f^k 的双曲不动点), 则称 f^k 在双曲不动点 p 的稳定流形 $W^s(p)$ 与不稳定流形 $W^u(p)$ 为 f 在**双曲 k-周期点 p 的稳定流形**与**不稳定流形**.

推论 设 f 是M上的 $C^r(r \geq 1)$ 微分同胚, p 是 f 的双曲 k-周期点,则 f 在 p 处的稳定流形、不稳定流形都是M的 C^r 浸入子流形.它在 p 处与 $Df^k(p)$ 的稳定子空间、不稳定子空间相切.

关于流也有类似的结果.

定义 设 p 是系统 $\dot{x} = X(x)$ 的奇点,系统的流记作 $\varphi(t, x)$ 称集合

$$W^s(p)=\{x\in M\mid \varphi(t,x)\to p,\ 当\ t\to+\infty\}$$
为流 $\varphi(t,x)$（或向量场 X）在点 p 的**稳定流形**；称集合
$$W^u(p)=\{x\in M\mid \varphi(t,x)\to p,\ 当\ t\to-\infty\}$$
为流 $\varphi(t,x)$（或向量场 X）在点 p 的**不稳定流形**.

定理 4.10（流的稳定流形定理） 设 X 是紧流形 M 上的 C^{r-1} $(r\geqslant 1)$ 向量场，p 是 X 的双曲奇点，则流 φ 在 p 的稳定流形（不稳定流形）是 M 的 C^r 浸入子流形，且在点 p 处与 $e^{DX(p)}$ 的稳定流形（不稳定流形）相切.

证明 令 $f(x)=\varphi(1,x)$，显然点 p 是 C^r 微分同胚 f 的双曲不动点.为区别起见，分别记 f 与 φ 在点 p 的稳定流形为 $W^s(p,f)$ 与 $W^s(p,\varphi)$. 为证明定理只需证明
$$W^s(p,\varphi)=W^s(p,f).$$
"$\subset$"关系是显然的. 下面检验"$\supset$"关系.

因为对 $\forall t$，$\varphi(t,p)=p$，由解对初值的连续依赖性，对 p 的任意邻域 $U\subset M$，存在 p 的邻域 V，使得对 $\forall t\in[0,1]$，$\varphi(t,V)\subset U$. 若 $x\in W^s(p,f)$，则存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时 $f^n(x)\in V$，从而，当 $t\geqslant n_0$ 时 $\varphi(t,x)\in U$，所以 $x\in W^s(p,\varphi)$. ▮

§4.4 双曲闭轨

考虑 R^n 或 M 中的系统
$$\dot{x}=X(x),$$
φ_t 是它的流，x 是向量场 X 的**正则点**，即 $X(x)\neq 0$. 过 x 取一个 $n-1$ 维超平面 R_x^{n-1}，使 $X(x)$ 不在此超平面内，即此超平面的法向量 $n(x)$ 与 $X(x)$ 不垂直:
$$n(x)\cdot X(x)\neq 0.$$
因向量场 X 连续，故存在 x 在 R_x^{n-1} 中的一个邻域 Σ，使得对 $\forall y\in\Sigma$ 都有
$$n(y)\cdot X(y)=n(x)\cdot X(y)\neq 0.$$
我们称此 Σ 为向量场 X 在点 x 的一个**截面**（局部）. 更一般地，可

以取Σ为一光滑曲面。

定义 称光滑曲面Σ为向量场X的**截面**，如果对 $\forall y\in\Sigma$都有

$$n(y)\cdot X(y)\neq 0,$$

其中 $n(y)$ 是Σ在点y处的切平面的法向量。显然截面上的点都是正则点。

若γ是系统$\dot{x}=X(x)$的一个闭轨，$x\in\gamma$（当然x是正则点），则$\exists T>0$，使 $\varphi_T(x)=x$。设Σ是X过点x的截面，由解对初值的连续性，存在x在Σ中的一个邻域U，使得从U出发的轨线都再到Σ上。

定义 设Σ是向量场X的截面，$U\subset\Sigma$，使得从U出发的轨线会再到达Σ。对于 $\forall y\in U$，令 $P(y)=\varphi_{\tau(y)}(y)$，其中 $\tau(y)$ 是从y出发的轨线第一次再到达Σ的时间。如此得到的映射 $P:U\to\Sigma$，称为向量场X对截面Σ的 Poincaré **映射**或**第一回返映射**。

我们在前面着重研究了向量场在双曲奇点附近轨道的性质。现在为了研究闭轨的稳定性与闭轨在扰动下的变化情况，先来研究向量场在正则点(非奇点)附近轨道的性质。

定理 4.11(局部管状流定理) 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，$\dim M=m$，$p\in M$是X的正则点，令集合

$$C=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\boldsymbol{R}^m\,|\,|x^i|<1,\ i=1,\cdots,m\}.$$

以X_C记C上的常向量场：对$\forall x\in C$，

$$X_C(x)=(1,0,\cdots,0),$$

则存在p在M中的一个邻域U_p与一个C^r微分同胚$h:U_p\to C$将X在U_p中的轨线映成X_C的轨线。

证明 取点p处的局部坐标卡(U,φ)，

$$\varphi:U\to V\subset\boldsymbol{R}^m,\quad \varphi(p)=0\in V.$$

令φ_*X是φ与X导出的V上的C^r向量场，即对 $\forall x\in V$，

$$\varphi_*X(x)=\mathrm{d}\varphi_{\varphi^{-1}(x)}X(\varphi^{-1}(x)).$$

因为$X(p)\neq 0$，所以 $\varphi_*X(0)\neq 0$。由解对初值的连续性可知，存在原点O的邻域 $V_0\subset V$ 与 $\tau>0$，使得

$$\phi:[-\tau,\tau]\times V_0\to V$$

是 φ_*X 在原点附近的局部流。

令 H 是与 $\varphi_*X(0)$ 正交的子空间，它同构于 R^{m-1}. 令

$S=H\cap V_0$, $\phi_1=\phi|_{[-\tau,\tau]\times S}$, $[-\tau,\tau]\times S\subset R\times H\cong R^m$.

在 $R\times H$ 中取基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$，其中

$$e_1\in R\times\{0\},\ e_2,\cdots,e_m\in\{0\}\times H.$$

因为对 $\forall y\in S$, $\phi_1(0,y)=y$，所以

$$D\phi_1(0,0)e_j=e_j,\quad j=2,\cdots,m;$$

因为

$$\frac{d}{dt}\phi_1(t,0)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\phi(t,0)\Big|_{t=0}=\varphi_*X(0),$$

所以

$$D\phi_1(0,0)e_1=\varphi_*X(0).$$

因此，$D\phi_1(0,0)$ 是从 $R\times H$ 到 R^m 的一个同构。

由反函数定理，ϕ_1 是从 $[-\tau,\tau]\times S$ 中 $(0,0)$ 的某个邻域满映到 R^m 中原点的一个邻域的微分同胚，所以当 ε 足够小，

$$C_\varepsilon=\{(t,x)\in R\times H\,|\,|t|<\varepsilon,\ |x_i|<\varepsilon,\ i=2,\cdots,m\}$$

时，ϕ_1 是由 C_ε 到它的像集(V 中的开集)的 C^r 微分同胚，且 ϕ_1 将 C_ε 中平行向量场 X_{c_ε} 的轨道，即 $x\in H$, $|t|<\varepsilon$ 的直线段，映成 φ_*X 的轨道。

考虑 C^∞ 微分同胚

$$g:C\to C_\varepsilon,\quad g(y)=\varepsilon y.$$

再令 $h^{-1}=\varphi^{-1}\circ\phi_1\circ g:C\to M$. 则取 $U_p=\varphi^{-1}\phi_1(C_\varepsilon)$，就有 $h:U_p\to C$ 是 C^r 微分同胚，满足定理的要求。▌

定义 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，若 U 是 M 中开集，

$$\begin{aligned}\varphi:U\to I^m&=I\times I^{m-1}\\&=\{(x,y)\in R\times R^{m-1}\,|\,|x|<1,|y_i|<1,\\&\qquad i=1,\cdots,m-1\}\end{aligned}$$

是 C^r 微分同胚，φ 将 X 在 U 中的轨线映成 I^m 中直线 $I\times\{y\}$，则称 (U,φ) 是 X 的一个**管状流**。

定理 4.12（管状流定理） 设 $\gamma \in M$ 是 X 的一个紧而不闭的轨线段，则存在 X 的一个管状流 (U,φ)，使 $\gamma \subset U$.

定理的证明由局部管状流定理与 γ 的紧性可得.证明从略(可参看[2])．定理的结果下一章要用.

定理 4.13 设 $X \in \mathscr{X}^r(M)$，Σ 是 X 的截面，存在 X 对 Σ 的 Poincaré 映射，则此 Poincaré 映射是局部 C^r 微分同胚.

证明 记 Poincaré 映射为 P，$P: U \to \Sigma$，$U \subset \Sigma$. 需证：存在 $V \subset U$，使得 $P|V$ 是到它的像集的 C^r 微分同胚.

设 $x \in U$，$z = P(x) \in \Sigma$，因此，x，z 都是正则点. 故存在 X 在点 z 的局部管状流，即存在 z 的邻域 $W \subset M$ 与 C^r 微分同胚 $h: W \to C$，将 X 在 W 中的轨线变成 C 中平行于 x_1 轴的直线. 将 Σ 在 W 中的部分映为与 x_1 轴垂直的超平面在 C 中的部分.

令 $\omega = \tau(x)$ 是由 x 出发到 z 的时间. 设 $\varphi(t, y)$是 X 的流，令

$$P_\omega(y) = \varphi(\omega, y)$$

是经过时间 ω 的映射，则 P_ω 是 C^r 微分同胚. 因

$$P_\omega(x) = z \in W,$$

由解对初值的连续性，存在 x 在 Σ 中的开邻域 V，使得对 $\forall y \in V$，

$$P_\omega(y) \in W.$$

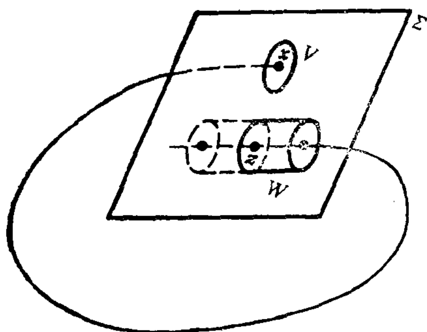


图 4.4

显然，C 向垂直 x_1 轴的超平面上的投影 $\pi: I \times I^{m-1} \to \{0\} \times I^{m-1}$ 是 C^∞ 的. 因此，π 经 h 导出的 W 向 Σ 上的投影 $k = h^{-1} \circ \pi \circ h: W \to \Sigma$ 是 C^r 的. 又显然 Poincaré 映射

$$P|V = k \circ P_\omega: V \to \Sigma,$$

从而 $P|V$ 是 C^r 的. 由解的唯一性可得映射一一

对应，再考虑向量场$-X$可知$P|V$是C^r微分同胚. ∎

定义 设γ是向量场X的闭轨，点$p\in\gamma$，Σ是向量场X过点p的截面，若点p是 Poincaré 映射$P:V\to\Sigma(V\subset\Sigma)$的双曲不动点（初等不动点），则称$\gamma$是$X$的**双曲闭轨（初等闭轨）**.

注：以下事实说明上述定义是合理的.

若另一点$p_1\in\gamma$，Σ_1是向量场X过点p_1的截面，类似于上定理可得知，$\exists$点p的邻域$U\subset\Sigma$，与C^r微分同胚$h:U\to\Sigma_1$，$h(q)$为由$q\in U$出发的轨线与Σ_1的第一个交点. 若以P_Σ, P_{Σ_1}分别表示截面Σ, Σ_1上的 Poincaré 映射，则有

$$P_{\Sigma_1}=h\circ P_\Sigma\circ h^{-1}.$$

因$h(p)=p_1$，所以

$$\begin{aligned}DP_{\Sigma_1}(p_1)&=Dh(p)\circ DP_\Sigma(p)\circ Dh^{-1}(p_1)\\&=Dh(p)\circ DP_\Sigma(p)\circ[Dh(p)]^{-1},\end{aligned}$$

即$DP_{\Sigma_1}(p_1)$与$DP_\Sigma(p)$有完全相同的特征值.

类似于命题 4.1, 4.3，关于初等闭轨有以下命题：

命题 4.14 设向量场$X\in\mathscr{X}^r(M)(r\geqslant 1)$有初等闭轨$\gamma$，则存在场$X$的邻域$\mathscr{N}\subset\mathscr{X}^r(M)$，$\gamma$的邻域$V\subset M$，使得对任意场$Y\in\mathscr{N}$，场$Y$在$V$内有闭轨.

命题的证明基于以下事实：向量场Y与X充分接近时，它们在共同的截面Σ上的 Poincaré 映射P_Y与P_X可以任意接近（在C^1模下）. 证明从略.

注：向量场Y在V中的闭轨没有唯一性. 因为，P_Y的周期点也对应着场Y的闭轨.

下面来证明向量场在双曲闭轨附近是局部结构稳定的. 为此，需要下面的引理.

定义 设γ是向量场X的闭轨，周期为ω. Σ是γ上点p处向量场X的截面. X_t表示向量场X导出的流. 如果存在点p的一个邻域$U\subset\Sigma$，使得$X_\omega(U)\subset\Sigma$，则称Σ是一个**不变截面**.

引理 设$X\in\mathscr{X}^r(M)$，γ是X的双曲闭轨，周期为ω，点

$p\in\gamma$，Σ 是场 X 过点 p 的截面，则存在 X 的邻域 $\mathscr{N}\subset\mathscr{X}^r(M)$，连续映射 $\mu:\mathscr{N}\to\mathscr{X}^r(M)$，使得对 $\forall Y\in\mathscr{N}$，

(1) 存在向量场 $Y^*=\mu(Y)=\rho_Y\cdot Y$，其中 $\rho_Y:M\to\boldsymbol{R}^+$ 是正的可微函数，在点 p 的某邻域外函数值为 1.

(2) 存在点 p 的邻域 $U\subset\Sigma$，使得

$$Y^*_\omega(U)\subset\Sigma.$$

也就是说，对 $Y\in\mathscr{N}$，存在向量场 Y^* 与 Y 轨线相同，方向相同，且对于 Y^* 截面 Σ 是不变截面.

证明 (1) 取小正数 $t_0\in(0,\omega)$，令 $\Sigma'=X_{-(\omega-t_0)}(\Sigma)$. 显然

$$X_{t_0}(p)=p'\in\Sigma'.$$

取点 p 的邻域 $\widetilde{U}\subset\Sigma$，使映射 $\alpha_X:\widetilde{U}\to\boldsymbol{R}$ 是 C^r 映射，其中 $\alpha_X(y)$ 为使得 $X_t(y)\in\Sigma'$ 的最小正时间 t. 显然，若对一切 $y\in\widetilde{U}$，

$$\alpha_X(y)\equiv t_0,$$

则 Σ 是 X 的不变截面(见图 4.5).

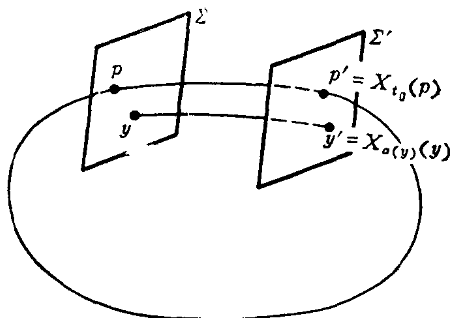


图 4.5

取 X 的邻域 $\mathscr{N}\subset\mathscr{X}^r(M)$ 充分小，使得对 $\forall Y\in\mathscr{N}$，Σ 也是 Y 的截面，且在 $\widetilde{U}$ 中对于 Y 也可以与上面类似地构造 C^r 映射 α_Y: $\widetilde{U}\to\boldsymbol{R}$. 即令 $\Sigma'_Y=Y_{-(\omega-t_0)}(\Sigma)$，对 $\forall y\in\widetilde{U}$，$\alpha_Y(y)$ 为使 $Y_t(y)\in\Sigma'_Y$ 的最小正数.

(2) 取 p 的邻域 $\bar{U}\subset\widetilde{U}$，然后相应于 $\widetilde{U}$ 上的 C^r 映射 α_X，我们在 Σ 上定义 C^r 映射 β_X 如下：对 $\forall y\in\Sigma$，令

$$\beta_X(y)=\begin{cases}\alpha_X(y), & \text{当 } y\in\bar{U},\\ \text{正值}, & \text{当 } y\in\widetilde{U}\backslash\bar{U},\\ t_0, & \text{当 } y\in\Sigma\backslash\widetilde{U}.\end{cases}$$

同样地，相应于 $\widetilde{U}$ 上的 C^r 映射 α_Y，定义 Σ 上的 C^r 映射 β_Y。

令 $G:\mathscr{N}\times\Sigma\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是 C^r 映射，当取定任一 $Y\in\mathscr{N}$，任一 $y\in\Sigma$ 后，

$$G_{Y,y}(t)\equiv G(Y,y,t)$$

是 t 的 $2r+3$ 次多项式，它的系数由以下 $2r+4$ 个条件所确定：

$$G_{Y,y}(0)=0,\quad G_{Y,y}(t_0)=\beta_Y(y),$$

$$\frac{dG_{Y,y}}{dt}(0)=1,\quad \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t_0)=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^kG_{Y,y}}{dt^k}(0)=0,\quad \frac{d^kG_{Y,y}}{dt^k}(t_0)=0\ (k=2,\cdots,r+1).$$

显然

$$G_{Y,y}(t)=t+a_1t^{r+2}+\cdots+a_{r+2}t^{2r+3},$$

其中

$$a_j=\frac{\beta_Y(y)-t_0}{\det A}A_{1j}\ (j=1,\cdots,r+2),$$

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} t_0^{r+2} & t_0^{r+3} & \cdots & t_0^{2r+3}\\ (r+2)t_0^{r+1} & (r+3)t_0^{r+2} & \cdots & (2r+3)t_0^{2r+2}\\ \vdots & \vdots & & \\ (r+2)!t_0 & \frac{(r+3)!}{2!}t^2 & \cdots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!}t_0^{r+2}\end{pmatrix},$$

A_{1j} 是 $a_{1j}=t_0^{r+1+j}$ 在 A 中的代数余子式。

对 $\forall Y\in\mathscr{N}$，定义 $H_Y:\Sigma\times[0,t_0]\to\boldsymbol{R}$，

$$H_Y(y,t)\equiv\frac{dG_{Y,y}(t)}{dt}.$$

不难由 $G_{Y,y}(t)$ 的性质得知 H_Y 有以下各性质：

(a) $H_Y(y, 0) = H_Y(y, t_0) = 1$，对 $\forall y \in \Sigma$；

(b) $H_Y(y,t) = 1$，对 $\forall y \in \Sigma \backslash \widetilde{U}$，$t \in [0, t_0]$；

(c) $D^k H_Y(y, 0) = D^k H_Y(y, t_0) = 0$，对 $\forall y \in \Sigma$，$k=1,\cdots,r$.
从而以上 H_Y 可扩张成 C^r 映射 $H_Y: \Sigma \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，使 H_Y 在 $\Sigma \times [0,t_0]$之外等于 1.

注意，凡 Y，y 使 $\beta_Y(y) = t_0$，则 $G_{Y,y}(t) \equiv t$. 故当 $y \in \Sigma \backslash \widetilde{U}$ 时，$G_{Y,y}$ 是恒同映射，$G_{Y,y}: [0,t_0] \to [0,t_0]$，从而，对于小的 $\mathscr{N}$，$\widetilde{U}$，$y \in \widetilde{U}$ 时，$G_{Y,y}: [0,t_0] \to [0,\beta_Y(y)]$ 是 C^r 微分同胚.

于是对 $\forall Y \in \mathscr{N}$ 得到 C^r 微分同胚 $\varphi_Y: \Sigma \times [0,t_0] \to M$，

$$\varphi_Y(y, t) = Y_{t^*}(y),$$

其中 $t^* = G_{Y,y}(t)$. 取集合

$$W_Y = \varphi_Y(\Sigma \times [0,t_0]) \subset M.$$

我们定义映射 $\rho_Y: M \to \boldsymbol{R}$，它在 W_Y 之外等于 1，在 W_Y 上为以下复合映射：对 $\forall q \in W_Y$，

$$q \xrightarrow{\varphi_Y^{-1}} (y,t) \xrightarrow{H_Y} H_Y(y,t).$$

根据以上构造方法，ρ_Y 是正的 C^r 可微函数.

(3) 对 $\forall Y \in \mathscr{N}$，考虑向量场 $Y^* = \rho_Y Y$. 我们来证：向量场 Y^* 有性质：对 $\forall y \in \overline{U}$，$Y^*_{t_0}(y) \in \Sigma'_Y$.

这是因为，当 $y \in \overline{U}$，令 $\phi: [0, B_Y(y)] \to M$ 是场 Y 过 y 的积分曲线，所以 $\phi(t) = Y_t(y)$，$\phi(\beta_Y(y)) \in \Sigma'_Y$. 我们令 $\phi^*: [0,t_0] \to M$ 是复合映射 $\phi^* = \phi \circ G_{Y,y}$. 不难验算 ϕ^* 是向量场 Y^* 过点 y 的积分曲线，因为，对 $\forall t \in [0, t_0]$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi^*}{dt}(t) &= \frac{d\phi}{dt}(G_{Y,y}(t)) \cdot \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) \\
&= H_Y(y,t) \cdot Y(\phi(G_{Y,y}(t))) \\
&= \rho_Y(\varphi_Y(y,t)) \cdot Y(\phi^*(t)) \\
&= \rho_Y(\phi^*(t)) \cdot Y(\phi^*(t)) \\
&= Y^*(\phi^*(t)).
\end{aligned}$$

于是，对 $\forall y \in \overline{U}$，

$$Y^*_{t_0}(y) = \phi^*(t_0) = \phi(\beta_Y(y)) \in \Sigma'_Y.$$

所以取 p 的邻域 $U \subset \overline{U}$，令 $\mu(Y) = Y^*$ 就满足引理的要求。∎

定理 4.15 若 γ 是向量场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，则 X 在 γ 局部结构稳定.

证明 设 γ 的周期为 ω，点 $p \in \gamma$，Σ 是场 X 过点 p 的截面. 由定理所设，点 p 是 Σ 上场 X 的 Poincaré 映射 P_X 的双曲不动点. 因为当 Y 接近 X 时，Y 在 Σ 上的 Poincaré 映射 P_Y 接近 P_X，所以由双曲不动点的局部结构稳定性，存在场 X 的邻域 $\mathscr{N}$，点 p 的邻域 $U \subset \Sigma$，使得对 $\forall Y \in \mathscr{N}$，存在一个同胚 h_Y，在邻域 U 上有关系：

$$h_Y \circ P_X = P_Y \circ h_Y.$$

令 $\mu: \mathscr{N} \to \mathscr{X}^r(M)$ 为引理中所得. 取 γ 的邻域 V 如下：

$V = \{y \in M \mid \exists t = t(y) \in [0, \omega]$，使 $X^*_{-t}(y) \in U, X^* = \mu(X)\}$.

然后定义 h_Y 在 V 上的开拓 $\tilde{h}_Y$：对 $\forall y \in V$，令

$$\tilde{h}_Y(y) = Y^*_{t(y)} \circ h_Y \circ X^*_{-t(y)}(y).$$

显然，$\tilde{h}_Y$ 将 X^* 的轨道映为 Y^* 的轨道，保持轨道的方向. 由引理，X^*, Y^* 与 X, Y 有相同的轨道，所以 $\tilde{h}_Y$ 将 X 的轨道映成 Y 的轨道，且保持方向. ∎

定义 设 γ 是向量场 X 的双曲闭轨，$V \subset M$ 是 γ 的邻域，分别称集合

$$W^s_V(\gamma) = \{y \in V \mid X_t(y) \in V,\ \text{对}\ \forall t \geqslant 0\}$$

与

$$W^u_V(\gamma) = \{y \in V \mid X_t(y) \in V,\ \text{对}\ \forall t \leqslant 0\}$$

为 γ 的**局部稳定流形**与**局部不稳定流形**.

注：由以上定义可见，对于双曲闭轨 γ，场 X 与其重新参数化后的场 $X^* = \mu(X)$ 有完全相同的局部稳定（不稳定）流形，所以在点 $p \in \gamma$ 取场 X 的截面时，总可以认为所取的截面 Σ 是不变截面. 设 $U \subset \Sigma$ 是点 p 的邻域，Poincaré 映射 P 在 U 上有定义. $W^s_U(p)$ 与 $W^u_U(p)$ 分别表示映射 P 在双曲不动点 p 处对邻域 U 的

局部稳定流形与局部不稳定流形. 取M中集合V_1,

$$V_1=\{z\in M\,|\,z=X_t(y),\ \text{其中}\ y\in U,\ t\in[0,\omega]\}$$

(ω是γ的周期),则V_1是γ的邻域. 显然有

$$W^s_{V_1}(\gamma)=\{z\in V_1\,|\,z=X_t(y),\ \text{其中}\ y\in W^s_U(p),t\in[0,\omega]\}$$

与

$$W^u_{V_1}(\gamma)=\{z\in V_1\,|\,z=X_t(y),\text{其中}\ y\in W^u_{P(U)}(p),\ t\in[-\omega,0]\}.$$

定理 4.16 设γ是向量场$X\in\mathscr{X}^r(M)$的双曲闭轨. 若V是γ的充分小邻域,则$W^s_V(\gamma)$与$W^u_V(\gamma)$是M的C^r子流形,$W^s_V(\gamma)\cap W^u_V(\gamma)=\gamma$,且相交是横截的.

证明 无妨设Σ是场X过点$p\in\gamma$的不变截面, $U\subset\Sigma$是点p的充分小邻域,使 Poincaré 映射 $P:U\to\Sigma$是C^r微分同胚.于是

$$W^s_{V_1}(\gamma)=\bigcup_{t\in[0,\omega]}X_t(W^s_U(p)),$$

$$W^u_{V_1}(\gamma)=\bigcup_{t\in[0,\omega]}X_{-t}(W^u_{P(U)}(p)).$$

因为点p是 Poincaré 映射P的双曲不动点,所以$W^s_U(p)$与$W^u_U(p)$是Σ的C^r嵌入子流形,且在点p处横截相交,

$$W^s_U(p)\cap W^u_U(p)=\{p\}.$$

因为Σ是场X在点p处的截面, 应用局部管状流的性质可见$W^s_{V_1}(\gamma)$与$W^u_{V_1}(\gamma)$是M的C^r子流形,它们沿γ横截相交,且

$$W^s_{V_1}(\gamma)\cap W^u_{V_1}(\gamma)=\gamma.$$

对于γ的充分小邻域V, $V\subset V_1$, 则 $W^s_V(\gamma)$与$W^V_u(\gamma)$分别是γ在流形$W^s_{V_1}(\gamma)$与$W^u_{V_1}(\gamma)$中的开邻域, 从而也是M的子流形. ∎

定义 设γ是场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$的双曲闭轨,分别称集合

$$W^s(\gamma)=\{y\in M\,|\,\omega(y)=\gamma\}$$

与

$$W^u(\gamma)=\{y\in M\,|\,\alpha(y)=\gamma\}$$

为 γ 的**稳定流形**与**不稳定流形**,其中 $\omega(y)$, $\alpha(y)$ 分别表示点 y 的 ω 极限集, α 极限集。

由 $W^s_U(p)$ 与 $W^u_V(p)$ 的性质可知,若 $z \in W^s_{V_1}(\gamma)(z \in W^u_{V_1}(\gamma))$, 则 $p \in \omega(z)(p \in \alpha(z))$,从而 $\omega(z) = \gamma(\alpha(z) = \gamma)$,所以,

$$W^s_{V_1}(\gamma) \subset W^s(\gamma), \quad W^u_{V_1}(\gamma) \subset W^u(\gamma),$$

并且

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{n \in N} X_{-n}(W^s_V(\gamma)),$$

$$W^u(\gamma) = \bigcup_{n \in N} X_n(W^u_V(\gamma)).$$

类似于定理 4.9(整体稳定流形定理),有

定理 4.17 场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨的稳定流形、不稳定流形 $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$ 是 M 的 C^r 浸入子流形。

第五章　Morse-Smale 向量场的结构稳定性

本章讨论紧流形M上的一类十分重要的结构稳定的动力系统，叫做 Morse-Smale 向量场. 它在 $\mathscr{X}^r(M)(r \geqslant 1)$ 中是开集，若M是二维的，则它还是 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的稠集.

定义　设M是n维紧流形，$X \in \mathscr{X}^r(M)(r \geqslant 1)$，称$X$是 Morse-Smale **向量场**，如果$X$满足以下条件：

(1) X有且仅有有限个临界元素(指奇点或闭轨)，且都是双曲的；

(2) 如果σ_1,σ_2是X的临界元素，则 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^u(\sigma_2)$ 横截相交(不相交也算作横截)；

(3) 向量场X的非游荡点集 $\Omega(X)$ 是由X的临界元素的并组成的.

注：我们在第二章中建立了微分同胚f的非游荡点的概念. 可以完全类似地，对于向量场X导出的流φ_t定义它的非游荡点. 向量场X的非游荡点集 $\Omega(X)$ 是指φ_t的非游荡点全体.

为方便起见，以后我们用 M-S 表示 $\mathscr{X}^r(M)$ 中所有 Morse-Smale 向量场的集合.

例 1　我们已知，环面 T^2 上的微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_1, \\ \dot{y} = \omega_2, \end{cases} \quad \omega_1,\omega_2 \in \boldsymbol{R},\ \omega_1 \neq 0$$

无论 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 是有理数或无理数它都是结构不稳定的. 显然它不是 Morse-Smale 系统，当 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 是有理数时，系统有无穷多个闭轨；当 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 是无理数时，系统没有临界元素.

例 2 球面 S^2 上的 C^∞ 向量场 X，有两个平衡点 p_1 与 p_2，其他一切轨道都是闭的，如图 5.1(a) 所示．取一 C^∞ 的非负函数 φ: $\boldsymbol{S}^2 \to \boldsymbol{R}^+$，它只在点 p ($p \neq p_1, p_2$)处取零值．

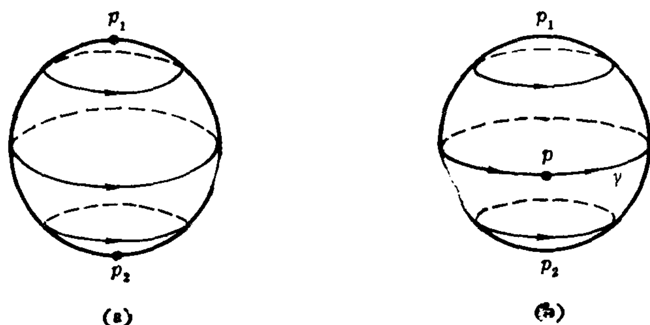


图 5.1

考虑向量场 $Y = \varphi \cdot X$，场 Y 也是 C^∞ 的，有三个平衡点 p_1，p_2 与 p，不闭轨线 γ 以点 p 为其 α 极限集与 ω 极限集．其他一切轨线都是闭的．如图 5.1(b) 所示．

显然，系统 $\dot{x} = Y(x)$ 不结构稳定．

$Y \bar{\in}$M-S．因为 γ 上的任一点 x 不是平衡点也不属于任何闭轨，但 $x \in \Omega(Y)$．

我们来证明 Morse-Smale 向量场是结构稳定的．为简单起见，仅对二维情况进行讨论，但结论对高维也成立．

下面先给出二维情况下 Morse-Smale 向量场的一个较为简单的等价定义．

命题 5.1 设 M 是二维紧流形，向量场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 是 M-S 的当且仅当它满足下列条件：

(a) X 有有限个临界元素，且都是双曲的．

(b) 不存在鞍点连线（即不存在一轨线它的 α 极限集与 ω 极限集都是鞍点）．

(c) 每一轨道都以唯一的一个临界元素作为 α 极限集，唯一

的一个临界元素作为 ω 极限集.

证明 若 $X\in$ M-S，则显然 X 满足上述条件(a)与(b). X 还满足(c). 因为若不然，设某点 x 出发的轨道以 σ_1,σ_2 两个临界元素为 ω 极限集，于是 σ_1 的某个不含其它临界元素的邻域的边界曲线(同胚于 S^1) 上存在 $\varphi_t(x)$ 的一串点 $\varphi_{t_k}(x)$, $t_k\nearrow+\infty$, $\varphi_{t_k}\to y$. y 不是临界元素，但 $y\in\Omega(X)$. 这与 X 满足 M-S 定义的条件(3)矛盾.

下面来证明充分性.

设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 满足条件 (a),(b),(c). 首先 X 已满足条件(1)，其次 X 还满足条件(2). 这是由于 M 是二维流形，而源(平衡点或闭轨)的不稳定流形或汇 (平衡点或闭轨) 的稳定流形都是二维的，若(2)不成立，只能是鞍点的稳定流形与不稳定流形破坏横截性.但是由条件(b)，这是不可能的.最后只须证明满足条件(3)，即须证 $\Omega(X)$ 由临界元素组成.

先证明一个汇型临界元素的稳定流形中除此临界元素本身之点外完全是游荡点.

(i) 若临界元素为一平衡点 p，则 $\exists$ 点 p 的开邻域 $D\subset W^s(p)$，且 D 的边界 ∂D 与 X 横截，X 通过 ∂D 时由外向内. 因为

$$W^s(p)-\{p\}=\bigcup_{t\in R}\varphi_t(\partial D)$$

(φ_t 是 X 的流)，而游荡点集是不变集，所以只须证明若 $x\in\partial D$，则 x 是游荡点. 令区域 $D_1=\varphi_1(D)$, $D_{-1}=\varphi_{-1}(D)$，取 $x\in\partial D$，令 V 是 x 的邻域，满足 V 与 D_1，与 $M\backslash D_{-1}$ 都不交. 于是当 $|t|>2$ 时，$\varphi_t(V)\cap V=\varnothing$，所以 x 是游荡点.

(ii) 若临界元素汇为一闭轨 γ，则也存在 γ 的一个邻域 U，使 U 的边界 S 与 X 横截. 因

$$W^s(\gamma)-\gamma=\bigcup_{t\in R}\varphi_t(S),$$

S 上的点是游荡点，所以 $W^s(\gamma)-\gamma$ 都是游荡点. 同理可得，源

型临界元素的不稳定流形除去临界元素本身之外全是游荡点．

现设 $x\in M$，不属于临界元素之并集，即 x 不是奇点也不在任一闭轨上．那么，由(b)及(c)，x 或者在某个汇的稳定流形上，或者在某个源的不稳定流形上．因此 x 是游荡点，即 $\Omega(X)$ 由 X 的临界元素组成．∎

定义 设 $X\in$ M-S，X 的**相图表** Γ 是指以 X 的临界元素作为元素的集合，并且具有如下规定的偏序：

若 $\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma$，$\sigma_1\prec\sigma_2$ 当且仅当

$$W^u(\sigma_1)\cap W^s(\sigma_2)\neq\varnothing,$$

即存在一条轨道，$t\to-\infty$ 时趋于 σ_1；$t\to+\infty$ 时趋于 σ_2．

注：当 M 是二维时，因为 $X\in$ M-S，X 无鞍点连线．若有 $\sigma_1\prec\sigma_2$，又 $\sigma_2\prec\sigma_3$，则必有 σ_2 为鞍点，σ_1 为源，σ_3 为汇．此时有 $\sigma_1\prec\sigma_3$．

例 3 设 $X\in$ M-S，轨线如图 5.2．p_1,p_2 是汇，r_1,r_2 是源，s_1,s_2 是鞍点．

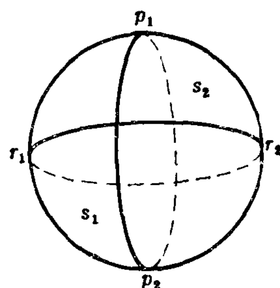
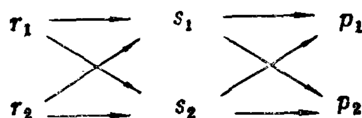


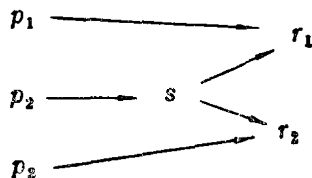
图 5.2

$$\Omega(X)=\{p_1,\ p_2,\ r_1,\ r_2,\ s_1,\ s_2\}.$$

相图表 Γ 如下：



例 4 设 Morse-Smale 向量场 X 轨线如图 5.3．p_1，p_2，p_3 是源，s 是鞍点，γ_1,γ_2 是汇．相图表 Γ 如下：



定义 设 $X,\tilde{X}\in$ M-S，$\Gamma,\tilde{\Gamma}$ 分别是 $X,\tilde{X}$ 的相图表，称 Γ 与 $\tilde{\Gamma}$ 是**同构的**，如果存在一个 Γ 到 $\tilde{\Gamma}$ 的一一对应 $h:\Gamma\to\tilde{\Gamma}$，使得

(a) $x\in\Gamma$ 是 X 的奇点 $\Longleftrightarrow h(x)\in\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{X}$ 的奇点；

(b) 若 $x_1,x_2\in\Gamma$，则 $x_1\prec x_2\Longleftrightarrow h(x_1)\prec h(x_2)$.

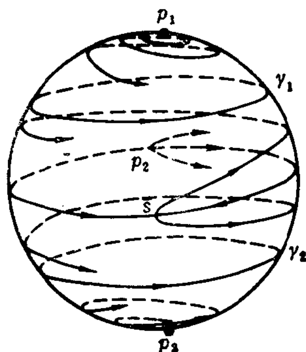


图 5.3

下面先来证明 M-S 向量场在小扰动之下具有同构的相图表（再进一步证明流拓扑等价）。证明之中需要过滤子的概念。下面给出它的定义.

定义 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，X 的一个**过滤子** $\mathfrak{M}$ 是指 M 的一串紧子流形 $M_i,(i=0,1,\cdots,k)$，

$\emptyset=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$，

$M_i\ (0<i<k)$ 是带边的，且满足：

(a) X 与 M_i 的边界横截，且

$$\varphi_t(M_i)\subset\mathrm{Int}M_i,\qquad \forall t>0, i=1,\cdots,k-1;$$

(b) 在 $M_{i+1}\backslash\mathrm{Int}M_i$ 中，X 的流 φ_t 的最大不变集恰好是 X 的一个临界元素 σ_{i+1}，即

$$\bigcap_{t\in R}\varphi_t(M_{i+1}\backslash\mathrm{Int}M_i)=\sigma_{i+1}.$$

引理 1 设 M 是二维紧流形，$X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是 M-S 向量场，则 X 存在过滤子.

证明 下面的证明是构造性的. 我们取 X 的一切汇型临界元素 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_j$（共有有限个）. 分别取它们的互不相交的邻域 $V_1,V_2,\cdots,V_j$（带边界），使每一邻域的边界与 X 横截（X 由外向内）. 令

$$M_1=V_1, M_2=M_1\cup V_2,\quad\cdots,\quad M_j=M_{j-1}\cup V_j.$$

再取 X 的一切鞍型临界元素 $\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_s$. 因 M 是二维的，临界元素双曲，故 $\sigma_r(j+1\leqslant r\leqslant s)$ 都是鞍点. 任取一鞍点 σ_r，其不稳

定流形是两根轨线．因 $X\in M-S$，所以这两轨线必趋于汇型临界元素．设两个汇是 $\sigma_{i_1},\sigma_{i_2}$（不排斥 $i_1=i_2$）．在 σ_r 的稳定流形上取截线 s,s'，分别交 $W^s(\sigma_r)-\sigma_r$ 的两个分支（见图 5.4(a)），且 s,s' 充分接近 σ_r，充分短，使得从 s,s' 出发的轨线与 V_{i_1},V_{i_2} 相交．分别取 s 与 s' 的两条轨线 a_1,a_2 与 a_1',a_2' 使 a_1,a_1' 与 V_{i_1}，a_2,a_2' 与 V_{i_2} 相交． 由 a_1,a_1',a_2,a_2',s,s' 与 Vi_1，V_{i_2} 的部分边界围成的区域仅含一个临界元素 σ_r．为使此区域的边界与 X 横截，我们来修改边界 a_1,a_1' 与 a_2,a_2'．例如对 a_2'，应用管状流定理，找到 a_2' 的一个管状流 (U,h)．U 如图 5.4 (a)中虚线所示，h 是 U 到欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个矩形上的同胚，h 将 U 中轨线映为矩形中直线． 在此矩形上作连续曲线如图 5.4(b)所示，此连续曲线在 h 下的原像 b_2' 与 X 横截，由外向内．取 b_2' 代 a_2'．用此种方法得到的 b_1，b_1'，b_2，b_2'，与

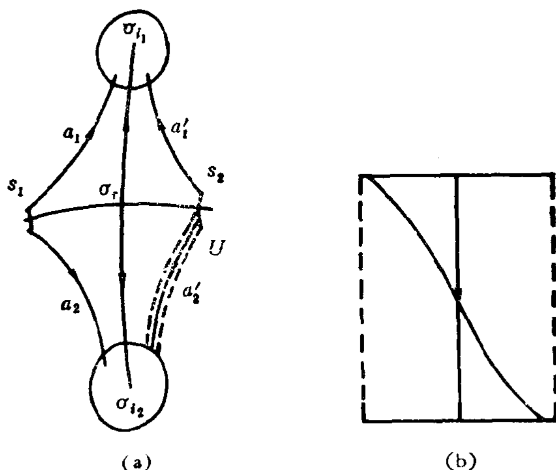


图 5.4

s_1，s_2，∂V_{i_1}，∂V_{i_2} 围成的区域记作 V_r，其边界与 X 横截，除 ∂V_{i_1}，∂V_{i_2} 上两段之外，轨线由外向内．V_r 中仅含 σ_r 为不变集．令

$$M_{j+1}=M_j\cup V_{j+1},\quad\cdots,\quad M_s=M_{s-1}\cup V_s.$$

设 $\sigma_{s+1},\cdots,\sigma_k$ 是全体源型临界元素，分别作它们的邻域 $V_{s+1},\cdots,V_k$ 使在 $M\backslash M_s$ 之内部且它们的边界与 X 横截（由内向

外）．令

$$M_{s+1}=M\setminus\bigcup_{i=s+2}^{k}V_i,\cdots,\ M_{k-1}=M\setminus V_k,\ M_k=M.$$

由以上构造方法可知 $\mathfrak{M}=\{M_i, i=0,1,\cdots,k\}$ 是X的一个过滤子．▮

对例3、例4中具体的M-S向量场构造过滤子是很好的例子．

引理2 设 $X\in$ M-S．$\mathfrak{M}=\{M_i, i=0,\cdots,k\}$是X的一个过滤子，则在$\mathscr{X}^r(M)$中存在$X$的一个邻域$\mathscr{N}$，使得$\mathfrak{M}$是$\mathscr{N}$中一切向量场的过滤子．

证明 因X横截于∂M_i，由$\bigcup_{i=1}^{k}\partial M_i$的紧性与横截的开性知：存在$X$的一个邻域$\mathscr{N}_0\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得任意$Y\in\mathscr{N}_0$，Y横截于$\partial M_i$ $(i=1,\cdots,k)$，且$\phi_t(M_i)\subset \mathrm{Int}M_i$，对$\forall t>0$，$i=1,\cdots,k-1$（其中$\phi_t$是Y的流）．因$X\in$ M-S，X的临界元素皆双曲，所以对X的任一临界元素σ_i存在X的一个邻域$\mathscr{N}_i\subset\mathscr{X}^r(M)$，$\sigma_i$的邻域$U_i\subset M_i\setminus\mathrm{Int}M_{i-1}$，使得对任意$Y\in\mathscr{N}_i$，都有Y的唯一一个临界元素$\sigma_i(Y)\subset U_i$，且$\sigma_i(Y)$是$U_i$中Y的最大不变集．

由过滤子的定义，若φ_t是X的流，则

$$\bigcap_{t\in R}\varphi_t(M_i\setminus\mathrm{Int}M_{i-1})=\sigma_i.$$

因此，存在$T>0$使得

$$\bigcap_{t=-T}^{T}\varphi_t(M_i\setminus\mathrm{Int}M_{i-1})\subset U_i',\quad i=1,\cdots,k,$$

其中U_i'使$\sigma_i\in U_i'$，$\bar{U}_i'\subset U_i$．由于T是有限数，因此存在X的充分小的邻域$\mathscr{N}_{k+1}$使得当$Y\in\mathscr{N}_{k+1}$时有$\sigma_i(Y)\in U_i'$，且

$$\bigcap_{t=-T}^{T}\phi_t(M_i\setminus\mathrm{Int}M_{i-1})\subset U_i,\quad i=1,\cdots,k,$$

其中ϕ_t是Y的流．因为，对$\forall Y\in\bigcap_{j=0}^{k+1}\mathscr{N}_j$，

$$\bigcap_{t\in R}\phi_t(U_i)=\sigma_i(Y)\quad(i=1,\cdots,k),$$

所以由

$$\bigcap_{t=-T}^{T}\phi_t(M_i\backslash\mathrm{Int}M_{i-1})\subset U_i\subset M_i\backslash\mathrm{Int}M_{i-1}$$

就得到

$$\bigcap_{t\in R}\phi_t(M_i\backslash\mathrm{Int}M_{i-1})=\sigma_i(Y).$$

总之，$\mathfrak{M}=\{M_i,\ i=0,1,\cdots,k\}$ 是 X 的邻域

$$\mathscr{N}=\bigcap_{j=0}^{k+1}\mathscr{N}_j$$

中的一切向量场 Y 的过滤子. ▌

以下定理指出了集合 M-S 是 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的开集.

定理 5.2 设 $X\in$ M-S，则在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中存在 X 的一个邻域 $\mathscr{N}$，使得当 $Y\in\mathscr{N}$，则 $Y\in$ M-S，且其相图表与 X 的相图表同构.

证明 由引理可知存在 X 的一个邻域 $\mathscr{N}_0\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得 X 的过滤子 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{N}_0$ 中一切向量场 Y 的过滤子，且由引理证明可见，可以选取 Y 的临界元素 $\sigma_i(Y)(i=1,\cdots,k)$ 使之有双曲性.

下面来证明，$\forall Y\in\mathscr{N}_0$，Y 无鞍点连线，即任一鞍点的不稳定流形都以某一汇型临界元素为 ω 极限集.

设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{k'}$ 是 X 的非鞍型临界元素，$V_1,\cdots,V_{k'}$ 是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{k'}$ 的邻域，其边界 $\partial V_i\,(i=1\cdots,k')$ 与 X 横截. 设 σ_r 是 X 的鞍点，注意 $X\in$ M-S，故 $W^u(\sigma_r)-\sigma_r$ 的两个分支分别趋于汇 σ_{i_1} 与 σ_{i_2}，从而与 $\partial V_{i_1},\partial V_{i_2}$ 相交. 因为 $W^u(\sigma_r)$ 在 $M\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{k'}V_i$ 中的部分是紧集，所以存在 X 的邻域 $\mathscr{N}_r$ 使当 $Y\in\mathscr{N}_r$ 时，Y 的与 X 的鞍点 σ_r 相应的鞍点 $\sigma_r(Y)$ 的不稳定流形 $W^u(\sigma_r(Y))$ 也与 ∂V_{i_1}，∂V_{i_2} 相交，从而趋于 Y 在 V_{i_1},V_{i_2} 中之汇 $\sigma_{i_1}(Y),\sigma_{i_2}(Y)$.

最后证明，对于任何 $Y\in\mathscr{N}_0$，Y 的非游荡点集

$$\Omega(Y)=\bigcup_i\sigma_i(Y).$$

当然只要证 $\Omega(Y)\subset\bigcup\limits_i\sigma_i(Y)$. 因为 $\mathfrak{M}$ 是 Y 的过滤子，所以 $\forall x\in M$，必对某个 i，$x\in M_i\backslash \mathrm{Int}M_{i-1}$. 如果 $x\bar{\in}\bigcup\limits_i\sigma_i(Y)$，而包含在 $M_i\backslash \mathrm{Int}M_{i-1}$ 中的整轨线只有 $\sigma_i(Y)$，所以过 x 的轨线必交 ∂M_i 或 ∂M_{i-1}. 因 $\mathfrak{M}$ 是 Y 的过滤子，所以对 $\forall t>0$，

$$\phi_t(M_{i-1})\subset \mathrm{Int}M_{i-1};$$

对 $\forall t<0$，

$$\phi_t(M\backslash M_i)\subset M\backslash M_i.$$

于是，x 是 Y 的游荡点，即 $x\bar{\in}\Omega(Y)$.

总之，取 $\mathscr{N}=\left(\bigcap\limits_r\mathscr{N}_r\right)\cap\mathscr{N}_0$ 即满足定理的要求：当 $Y\in\mathscr{N}$，就有 $Y\in$ M-S. 又令 $\sigma_i\to\sigma_i(Y)$ 就是一个 X 与 Y 的相图表的同构对应. ▌

下面是本章的主要定理.

定理 5.3 若 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是 M-S 向量场，则 X 是结构稳定的.

证明 在定理 5.2 的基础之上，我们来构造 M 上的同胚 h，使 h 映场 X 的轨线为场 Y 的轨道，且保持轨线的方向.

(1) 先设 X 无闭轨.

取 X 的汇型平衡点 σ，设 V 是 σ 的邻域，当 $\mathscr{N}$ 充分小时，任意 $Y\in\mathscr{N}$ 有 $\sigma(Y)\in V$($\sigma(Y)$ 是与 σ 对应的 Y 的汇)，且 Y 与 ∂V 横截，$V\subset W^s(\sigma(Y))$. 令 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$ 是 X 的鞍点，使 $\sigma_i\prec\sigma$，$i=1,\cdots,s$. 点 p_i 是 $W^u(\sigma_i)-\sigma_i$ ($i=1,\cdots,r$) 的分支与 ∂V 的交点. $\sigma_i(Y)$ 与 σ_i 相应是 Y 的鞍点，$p_i(Y)$ 是 $W^u(\sigma_i(Y))-\sigma_i(Y)$ 的分支与 ∂V 的交点. 象引理 1 中那样对每个 σ_i，在 $W^s(\sigma_i)-\sigma_i$ 的两个分支上取点 $q_i,\tilde{q}_i$，过 $q_i,\tilde{q}_i$ 作 X 的截线 $s_i,\tilde{s}_i$(见图 5.5(a)). 相应地，对 $\sigma_i(Y)$ 取点 $q_i(Y),\tilde{q}_i(Y)$，作截线 $s_i(Y)$，$\tilde{s}_i(Y)$. $W^u(\sigma_i)$ 与 $\varphi_t(s_i)$，$\varphi_t(\tilde{s}_i)$，$t\in\boldsymbol{R}$ 是一族互不相交的曲线族，是 $W^s(\sigma_i)$

上的一族纤维．每一纤维 f 与 $W^s(\sigma_i)$ 交于一点 $f\cap W^s(\sigma_i)$，将每条纤维 f 上的一切点都映为点 $f\cap W^s(\sigma_i)$ 的投影映射 π_i 显然是连续的，若将 π_i 限制到点 p_i 在 ∂V 上的一个小邻域 I_i 上则是同胚(见图 5.5(b))．同样对 Y 得到 $\pi_i(Y)$．

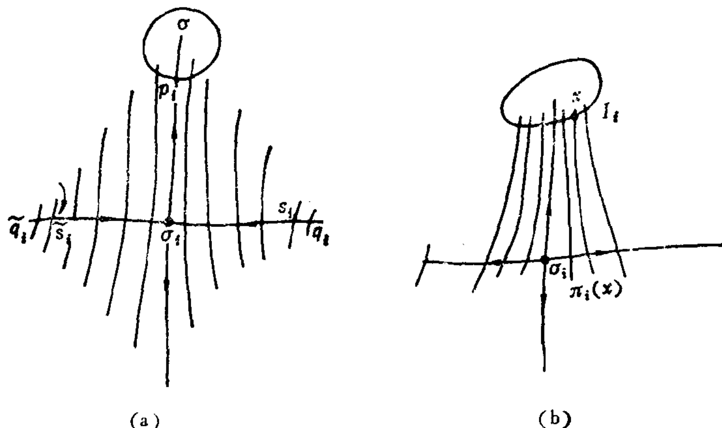


图 5.5

现在来构造 X,Y 之间的一个拓扑等价 h．令

$$h(\sigma)=\sigma(Y),\ h(\sigma_i)=\sigma_i(Y),$$
$$h(p_i)=p_i(Y),\ h(q_i)=q_i(Y),$$
$$h(\tilde{q}_i)=\tilde{q}_i(Y)\ (i=1,\cdots s).$$

再令

$$h(\varphi_t(q_i))=\Phi_t(h(q_i))=\psi_t(q_i(Y)),$$
$$h(\varphi_t(\tilde{q}_i))=\psi_t(h(\tilde{q}_i))=\psi_t(\tilde{q}_i(Y)),$$

于是 h 已经在整个 $W^s(\sigma_i)$ 上定义了．取 p_i 在 ∂V 上的邻域 I_i 充分小，使得所有 I_i 互不相交，限制在 I_i 上，π_i 是同胚．对于 $x\in I_i$，令

$$h(x)=[\pi_i(Y)]^{-1}h(\pi_i(x)),$$

从而在并集 $\bigcup_{i=1}^{r} I_i\subset\partial V$ 上 h 已定义．当 X 的邻域 $\mathscr{N}$ 充分小时，

$h|l_i$ 接近恒同，$h(l_i)$ $(i=1,\cdots r)$ 也互不相交．因此，可以将 h 开拓为 ∂V 到自身的同胚．

用以上方法对 X 的每一个汇 σ 都找到一个 V，使 h 在 ∂V 上有了定义，且在此过程中，在一切鞍点的稳定流形上 h 也已定义了．如果 $x\in W^s(\sigma)$，则 $\exists t_0=t_0(x)\in \boldsymbol{R}$，使 $\varphi_{t_0}(x)\in\partial V$，我们令

$$h(x)=\psi_{-t_0}(h\varphi_{t_0}(x)).$$

最后，若 σ 是 X 的源，定义 $h(\sigma)=\sigma(Y)$．总之，在整个 M 上定义了 h．h 是一对一的，因为若改变 X 与 Y 的地位，如上定义出的就是 h^{-1}．至此，为证明 h 是同胚，只需证明 h 有连续性即可．

h 在汇与汇的稳定流形上连续是显然的．下面来证 h 在鞍点的稳定流形上有连续性．即，设 σ_i 是鞍点，$x_0\in W^s(\sigma_i)$，$x_n\to x_0$，来证 $h(x_n)\to h(x_0)$．首先，我们按 h 的定义来检验：h 将 σ_i 的任一纤维(由 l_i 所限制的)映为 $\sigma_i(Y)$ 的一纤维．即，对任意 z 在纤维上检验关系式：

$$h(\pi_i(z))=\pi_i(Y)[h(z)].$$

只需考虑 $z\in W^s(\sigma)$，$z\bar{\in} W^s(\sigma_i)$．因 z 在纤维上推出 $\exists x\in s_i$，$t_1\in \boldsymbol{R}$，使 $z=\varphi_{t_1}(x)$，并且 $\exists t_2\in\boldsymbol{R}$ 使 $\varphi_{t_2}(z)=y\in l_1$，于是按定义

$$h(z)=\psi_{-t_2}\circ h\circ\varphi_{t_2}(z).$$

同时，因 $y=\varphi_{t_1+t_2}(x)$，所以

$$\pi_i(y)=\varphi_{t_1+t_2}(q_i),$$

由定义

$$\pi_i(Y)h(y)=\psi_{t_1+t_2}(q_i(Y)).$$

注意上面已得到 $h(z)=\psi_{-t_2}h(y)$，所以

$$\pi_i(Y)h(z)=\psi_{t_1}(q_i(Y)).$$

另一方面，由 $z=\varphi_{t_1}(x)$ 知 $\pi_i(z)=\varphi_{t_1}(q_i)$，由定义

$$h(\pi_i(z))=\psi_{t_1}(q_i(Y)).$$

所要检验的关系式得证．应用关系式，由 $x_n\to x_0$ 知

$$\pi_i(Y)h(x_n)=h(\pi_i(x_n))\to h(\pi_i(x_0))=h(x_0),$$

即 $h(x_n)$ 所在的纤维收敛到 $h(x_0)$ 的纤维．剩下只要证明，$h(x_n)$

收敛于 $W^s(\sigma_i(Y))$ 即可．若不然，则必有 $h(x_n)$ 的子列 $h(x_{n_k})$ 收敛于 $h(x_0)$ 的纤维上某一点 $y \neq h(x_0)$，从而 y 在汇的稳定流形上．由 h^{-1} 在点 y 连续，得

$$x_{n_k} \to h^{-1}(y) \neq x_0.$$

这与 $x_n \to x_0$ 矛盾．所以 h 在鞍点的稳定流形上也连续．最后，可以类似地证明，h 在源也连续．

(2) 设 X 有闭轨．

因闭轨双曲，闭轨又在二维流形上，所以或是汇或是源．即或吸引或排斥．

无妨设 X 与 $Y \in \mathscr{N}$ 的相图表中按同构互相对应的闭轨有相同的周期与不变截面．因为若不然，可以应用定理 4.15 的引理在闭轨的一个邻域内将场 X,Y 重新参数化使得它们的闭轨有相同的周期与不变截面，而不改变向量场的轨道．

下面再分两种情况讨论．

(2a) 设一切闭轨都是吸引的．

先对每一奇点汇用(1)中的方法取邻域 V，定义 h．对吸引闭轨 γ 取场 X 的不变截线 Σ，使得 Σ 上的 Poincaré 映射 P_X 是同胚． X 小扰动后的场 Y 的相应的闭轨 $\gamma(Y)$ 也以 Σ 为不变截线，在 Σ 上 P_Y 也是同胚．

设 $\sigma,\sigma(Y)$是 X,Y 在相图表的同构对应下相应的鞍点，与 γ，$\gamma(Y)$ 的关系为：

$$\sigma \prec \gamma, \quad \sigma(Y) \prec \gamma(Y).$$

于是 σ 与 $\sigma(Y)$ 的不稳定流形都与截线 Σ 相交．分别记第一个交点为 x,y．在 Σ 上取点 x 的小邻域 U，由于可以令扰动很小，所以 U 也是点 y 在 Σ 上的邻域．在 $W^s(\sigma)$-σ 的两支上取点 q，$\tilde{q}$．过 q，$\tilde{q}$ 作场 X 的截线 s，$\tilde{s}$，使也是场 Y 过 $W^s(\sigma(Y)) - \sigma(Y)$ 的截线．记 $W^s(\sigma(Y)) - \sigma(Y)$ 与 $s,\tilde{s}$ 的交点为 $q(Y),\tilde{q}(Y)$．于是定义鞍点 σ 的稳定流形到鞍点 $\sigma(Y)$ 的稳定流形上的同胚 h 为

$$h(\varphi_t(q)) = \psi_t(q(Y)), \quad h(\varphi_t(\tilde{q})) = \psi_t(\tilde{q}(Y)), \quad \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

再应用纤维 $\varphi_t(s)$，$\varphi_t(\tilde{s})$ 与 $\phi_t(s)$，$\phi_t(\tilde{s})$，以类似于（1）中的方法在 Σ 上 x 的某邻域中定义同胚 h，$h(x)=y$. 因为最多有有限多个鞍点 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 与 γ 有"$\prec$"的关系，所以我们可以在 Σ 上取其相应的开区间 $U_1,\cdots,U_n$，使之互不相交，并且与区间 $P_X(U_i)$，$i=1,\cdots,n$ 也互不相交. 于是，h 在开区间之并 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 上已经定义了. 当 X 的邻域 $\mathscr{N}$ 充分小时，$h|U_i$ 接近恒同，所以区间 $U_i(Y)=h(U_i)$ 与 $P_Y(U_i(Y))$，$i=1,\cdots,n$ 也互不相交. 下面来开拓 h.

点 $p=\Sigma\cap\gamma$ 分 Σ 为两段 Σ_1 与 Σ_2. 取出小区间 $U_i(i=1,\cdots,n)$ 之中在 Σ_1 上的，然后对 γ 由远及近排列为 $U_{i_1},\cdots,U_{i_k}$（见图 5.6). U_{i_1} 的距 γ 较远的端点记作 b. 先将 h 开拓为 Σ_1 上的区间 $[P_X(b),b]$ 到 $[P_Y(h(b)),h(b)]$ 的同胚(注意区间 $[P_X(b),b]\supset\bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$,因为 $P_X(b)$ 较一切 $U_{i_j}(j=1,\cdots,k)$中的点更靠近 γ). 然后按 Poincaré 映射 P_X,P_Y 将 h 开拓到$(p,b]$上,即当 $x\in(p,b]$ 时,令

$$h(x)=P_Y^n h(P_X^{-n}(x)),$$

其中 n 为使 $P_X^{-n}(x)\in(P_X(b),b]$ 的整数. 类似地，在 Σ_2 中弧段 $[a,p)$上定义同胚 h（其中 a 是 Σ_2 上各小区间的端点中距 γ 最远的端点). 再令

$$h(p)=p(Y)=\Sigma\cap\gamma(Y),$$

就得到 Σ 上区间 $[a,b]$ 到 $[h(a),h(b)]$ 的同胚 h.

在 γ 的稳定流形 $W^s(\gamma)$ 上定义 h 如下：若 $x\in W^s(\gamma)$，令

$$h(x)=\phi_{-t(x)}h[\varphi_{t(x)}(x)],$$

其中 $t(x)\geqslant 0$ 是最小非负数,使

$$\varphi_{t(x)}(x)\in[a,b]\subset\Sigma.$$

再对源型平衡点 σ 令 $h(\sigma)=\sigma(Y)$,就给出了 h 在整个 M 上的定义.

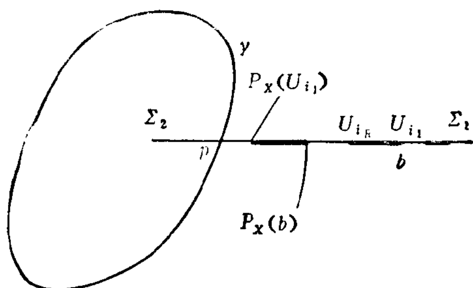


图 5.6

因为 Σ 是不变截线，如上定义的 h 是满映的，双方单一的。在 $W^s(\gamma)$ 上的连续性由 $t(x)$ 对 x 连续可得，其余各处的连续性(1)中已证。总之，h 是 M 上的同胚，将 X 的轨线保方向地映为 Y 的轨线。

(2b) 设 X 有一个吸引闭轨与一个排斥闭轨。

取排斥闭轨 σ_l（周期 ω_0）的一个不变截线 Σ_l。设 $I_l\subset\Sigma_l$，I_l 中的点出发的轨线都经过 ω_0 时间退回到 Σ_l 上。I_l 被有限个鞍点的稳定流形分割为一些开的小区间。注意，在每个分割出的开区间中的点都以同一个汇型临界元素为 ω 极限集。设 p 是某一个分点，即 σ_k 是鞍点，

$$\sigma_l\prec\sigma_k,\quad p\in W^s(\sigma_k)\cap I_l.$$

取 p 在 I_l 中的小邻域即区间 $[a,b]$，使过 $[a,b]$ 的轨线与 $W^s(\sigma_k)$ 的截线 s_k 相交（见图 5.7）。

将 X 重新参数化，使得 $[a,b]$ 中的点出发的轨线都经过同样长的时间 $t=1$ 到达 s_k。仍用 X 记参数化后的向量场。令 $[a',b']$ 是包含 p 的小区间，$[a',b']\subset(a,b)$. 再对 X 重新参数化使 $[\varphi_1(a),\varphi_1(a')]\subset s_k$ 中的点经过时间 $t=1$ 到达 Σ_i（吸引闭轨 σ_i 的不变截线；使 $[\varphi_1(b'),\varphi_1(b)]\subset s_k$ 中的点经时间 $t=1$ 到达 c_i（平衡点汇 σ_i 的邻域的边界，与 X 横截）。对于其稳定流形分割 I_l 的一

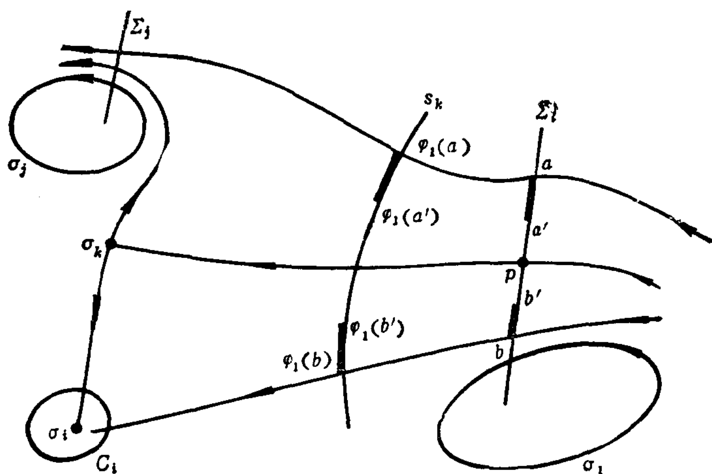


图 5.7

切鞍点，逐个地进行上述的参数化过程．令 $\bar{a}$ 是 Σ_l 上在 σ_l 的同一侧的所有区间$[a, b]$距 $\Sigma_l \cap \sigma_l$ 最远的端点．再一次参数化X使区间 $[\bar{a}, P_X^{-1}(\bar{a})]$中所有 $[a,b]$之并的余区间中的点出发的轨线都经过相同的时间 $t=2$ 到达各个不同的 c_i 与 Σ_i.

对X的邻域 $\mathscr{N}$ 中的Y也如上地参数化，然后与(2a)中完全一样地定义 h. 显然在映射 h 之下，

$$h([b',b]) = [b'(Y),b(Y)] \subset \Sigma_l.$$

而$[a,b]$是包含 $[b',b]$ 的纤维，$[a(Y),b(Y)]$ 是包含 $[b'(Y), b(Y)]$ 的纤维，所以

$$h([a,b]) = [a(Y), b(Y)] \subset \Sigma_l.$$

于是再开拓 h，令

$$h(\Sigma_l \cap \sigma_l) = \Sigma_l \cap \sigma_l(Y);$$

在排斥闭轨 σ_l 上定义 h 如下：若点 $x \in \sigma_l$，令

$$h(x) = \psi_{-t(x)} h(\varphi_{t(x)}(x)),$$

其中 $t(x)$ 是使 $\varphi_{t(x)}(x) = \Sigma_l \cap \sigma_l$ 的最小非负数．至此，在整个M上定义了同胚 h. h 将X的轨线映为Y的轨线且保持方向. ▌

第六章　双曲集与公理 A 微分同胚

第三章中我们给出过 $\boldsymbol{R}^2$ 中双曲集的定义，并且证明了 Smale 马蹄的不变集 Λ 是双曲集，或者说 Λ 有双曲结构．紧 Riemann 流形上的双曲集在动力系统的研究中占有相当重要的地位，因为它直接联系到 Anosov 微分同胚、公理 A 微分同胚的研究．

本章分四节．§6.1 给出双曲集的定义、例子；§6.2 中讨论双曲集的稳定流形与不稳定流形的存在性；§6.3 中讲局部乘积结构，Anosov 微分同胚，公理 A 微分同胚的定义；§6.4 中证明公理 A 微分同胚的谱分解定理．这些为后面两章更细致地研究公理 A 微分同胚建立了基础．

§ 6.1　双曲集的定义及例

我们知道，如果点 p 是紧流形 M 上的微分同胚 f 的双曲不动点，则其切空间 T_pM 可以直和分解：

$$T_pM = E_p^s \oplus E_p^u.$$

令 $A = \mathrm{D}f(p)$，$A|E_p^s = A^s$，$A|E_p^u = A^u$，就有：

$$A^s: E_p^s \to E_p^s, \quad A^u: E_p^u \to E_p^u.$$

且存在 $\lambda \in (0,1)$，使

$$\|A^s\| \leqslant \lambda, \quad \|(A^u)^{-1}\| \leqslant \lambda.$$

将此性质引伸到一般不变集 Λ 上，就得到双曲不变集的定义．

定义　设 M 是紧 Riemann 流形，微分同胚 $f: M \to M$，Λ 是 f 的不变集，如果 M 的切丛 TM 限制在 Λ 上记作 $T_\Lambda M$，$T_\Lambda M$ 有一个对 $\mathrm{D}f$ 的不变分解：

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u,$$

即对任一 $x\in\Lambda$，都有直和分解：

$$T_xM = T_x^sM \oplus T_x^uM,$$

T_x^sM，T_x^uM 对 x 是连续的，且满足

$$Df(T_x^sM) = T_{f(x)}^sM,$$

$$Df(T_x^uM) = T_{f(x)}^uM.$$

另外，存在常数 A 与 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$|Df^n(v)| \leqslant A\lambda^n|v|, \qquad 当\ v\in E^s,$$

$$|Df^{-n}(w)| \leqslant A\lambda^n|w|, \qquad 当\ w\in E^u,$$

其中$|\cdot|$是M的 Riemann 度量，则称 Λ 是 f 的**双曲不变集，简称双曲集**．称 λ 是 f 在 $T_\Lambda M$ 上的**压缩常数**．

注 1：T_x^sM, T_x^uM 对 x 连续是指 T_x^sM, T_x^uM 具有在 Λ 上随 x 连续变化的坐标向量 $e_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$，即 $e_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是 Λ 上的连续向量场．

注 2：第三章中 Smale 马蹄映射的不变集 Λ 是上述双曲集的例子．

命题6.1 若 Λ 是微分同胚 $f: M\to M$ 的紧双曲不变集，则在M上可以引进与原来度量等价的新 Riemann 度量$\|\cdot\|$，使得双曲集定义中的 $A=1$．此种度量称为"**对 f 适应的**"．

证明 不妨设 $A>1$，否则命题的结论已成立．

取 $N\in Z^+$，使得 $A\lambda^N<1$．定义新的度量$\|\cdot\|$如下：

对任意 $v\in E^s$，令

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |Df^n(v)|^2.$$

由双曲集的定义，有

$$\|v\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} A^2\lambda^{2n}|v|^2 < NA^2|v|^2.$$

注意 $Df(v)\in E^s$，所以

$$\|Df(v)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |Df^n(v)|^2$$

$$= \|v\|^2 - |v|^2 + |Df^N(v)|^2$$
$$\leqslant \|v\|^2 - |v|^2 + A^2\lambda^{2N}|v|^2$$
$$< \left[1 - \frac{1}{NA^2}(1 - A^2\lambda^{2N})\right]\|v\|^2.$$

因为 $A\lambda^N < 1$, $NA^2 > 1$, 所以令

$$\lambda_0^2 = 1 - \frac{1}{NA^2}(1 - A^2\lambda^{2N}),$$

于是存在 $\lambda_0 \in (0,1)$,使对任意 $v \in E^s$ 有

$$\|Df(v)\| \leqslant \lambda_0\|v\|,$$

因此

$$\|Df^n(v)\| \leqslant \lambda_0^n\|v\|.$$

类似地,对 $w \in E^u$, 令

$$\|w\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |Df^{-n}(w)|^2,$$

亦有

$$\|Df^{-n}(w)\| \leqslant \lambda_0^n\|w\|.$$

对任意 $u \in T_\Lambda M$, 令 $u = v + w$, $v \in E^s$, $w \in E^u$. 令

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

就有

$$|v|^2 + |w|^2 \leqslant \|u\|^2 \leqslant NA^2(|v|^2 + |w|^2),$$

$\|\cdot\|$ 是 $T_\Lambda M$ 上一个与$|\cdot|$等价的度量. 由假设Λ是紧集,因此可以连续扩充到 TM 上.

取λ使 $\lambda_0 < \lambda < 1$, 再取M上的一个 C^∞ 度量 $|||\cdot|||$, 它在 TM 上充分接近$\|\cdot\|$,于是在 $T_\Lambda M$ 上有

$$|||Df(v)||| < \lambda|||v|||, \quad |||Df^{-1}(w)||| < \lambda|||w|||. \blacksquare$$

例 1 二维环面 T^2 上的双曲线性自同构 A(见第三章§3.4)以环面 T^2 为其双曲不变集.

首先 T^2 是A的不变集. 对于 T^2 中每一点 x 的切空间 T_xT^2 作直和分解

$$T_xT^2 = E_x^s \oplus E_x^u,$$

其中 $E_x^u = \text{span}\{\xi_1\}$，$E_x^s = \text{span}\{\xi_2\}$，$\xi_1$，$\xi_2$ 分别是对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 > 1,\ \lambda_2 < 1)$ 的特征向量.

显然 $E^s = \bigcup E_x^s, E^u = \bigcup E_x^u$ 是 $DA = A$ 作用下不变的. DA 在 E^s 上收缩，在 E^u 上扩张. 即对 $\forall v \in E^s$，有

$$|DA(v)| = \lambda_2 |v|,$$

对 $\forall w \in E^u$，有

$$|DA(w)| = \lambda_1 |w|.$$

取 $\lambda = \max\left(\lambda_2, \dfrac{1}{\lambda_1}\right) < 1$,就有,当 $v \in E^s$ 时,

$$|DA(v)| \leqslant \lambda |v|,$$

当 $w \in E^u$ 时

$$|DA^{-1}(w)| \leqslant \lambda |w|.$$

所以 T^2 是双曲不变集.

§6.2 双曲集的稳定流形定理

本节中我们将双曲不动点的稳定流形定理推广到双曲集上.

设M是紧、Riemann 流形，$f: M \to M$ 是 $C^r (r \geqslant 1)$ 微分同胚.

定义 对于点 $x \in M$，称集合

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(y),\ f^n(x)) \to 0,\ \text{当}\ n \to +\infty\}$$

为 f 在点 x 的**稳定流形**;称集合

$$W^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(y),\ f^{-n}(x)) \to 0,\ \text{当}\ n \to +\infty\}$$

为 f 在点 x 的**不稳定流形**.

定义 对于点 $x \in M$ 与数 $b > 0$,称集合

$$W_b^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) < b,\ \text{对}\ \forall n \geqslant 0\}$$

为 f 在点 x 尺度为 b 的**局部稳定流形**;称集合

$$W_b^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(y),\ f^{-n}(x)) < b,\ \text{对}\ \forall n \geqslant 0\}$$

为 f 在点 x 尺度为 b 的**局部不稳定流形**.

注：当 x 是双曲不动点时，显然 $W^s(x), W^u(x), W^s_b(x)$ 与 $W^u_b(x)$ 就是不动点 x 的稳定流形、不稳定流形、尺度 b 的局部稳定流形与局部不稳定流形.

定理 6.2（双曲集的局部稳定流形定理） 设 f 是紧 Riemann 流形M上的 C^r $(r \geqslant 1)$ 微分同胚，$\Lambda \subset M$ 是 f 的紧、双曲不变集，则有以下结论：

(1) 存在数 $\beta > 0$,使得对$\forall x \in \Lambda$,都存在一个 C^r 嵌入局部稳定流形 $W^s_\beta(x)$;

(2) 对任意 $x \in \Lambda$, $W^s_\beta(x)$ 在点 x 与 $T^s_x M$ 相切，其中 $T^s_x M$ 如双曲集定义所述；

(3) $\{W^s_\beta(x)\}_{x \in \Lambda}$ 是一族 C^r 子流形，随 x 连续变化.

注："随 x 连续变化"的确切含义如下：对 $\forall x \in \Lambda$，存在 x 的一个邻域 $A \subset \Lambda$，与一个连续映射 $\varphi: A \to C^k(D^n, M)$，使得对 $\forall x \in A$, $\varphi(x) = \varphi_x$ 是映欧氏空间中的 n 维球 D^n 到 x 在 $W^s_\beta(x)$ 的一个邻域的 C^k 微分同胚.

证明定理之前,先引入两个概念.

(1) 指数映射 M是光滑 Riemann 流形，点 $p \in M$，定义指数映射 $\exp_p$: $T_p M \to M$ 如下：对$\forall \xi \in T_p M$，令 $\exp_p(\xi)$ 是 M上一点，它在过点 p 的以 ξ 为切向量的测地线上，且与 p 的测地距离为 $|\xi|$. 映射 $\exp_p$ 是 $T_p M$ 中原点的一个小邻域到M中点 p 的一个小邻域上的微分同胚.

当M紧时,切丛 TM 中邻域的大小可以不依赖于点 p，即存在与点 p 无关的 $\varepsilon > 0$，使得 $T_p M$ 中原点的 ε 邻域都可以经 $\exp_p$ 微分同胚地映到M中点 p 的 ε 邻域上.

指数映射足够光滑,只要流形M充分光滑，且有

$$\exp_p(0) = p;$$
$$D\exp_p(0) = \mathrm{id}: T_p M \to T_p M.$$

(2) 截面空间 我们的符号 C_b 表示 Λ 上的所有有界截面组

成的集合，即

$$C_b=\{\rho:\Lambda\to T_\Lambda M \mid \text{对 } \forall x\in\Lambda,\ \rho(x)\in T_xM,\ |\rho(x)| \text{ 有界}\}.$$

对于 $\rho\in C_b$，定义其范数

$$\|\rho\|=\sup_{x\in\Lambda}|\rho(x)|,$$

于是 C_b 是 Banach 空间。C_b 中以零截面 $\rho(x)=0$ 为原点的 δ 球 $C_b(\delta)$ 是指集合

$$C_b(\delta)=\{\rho\in C_b \mid \text{对 } \forall x\in\Lambda,\ |\rho(x)|\leqslant\delta\}.$$

类似地，以 C_0 表示 Λ 上所有连续截面组成的集合，与 C_b 中一样地定义范数之后，C_0 也是 Banach 空间，是 C_b 的子空间。类似地也有以零截面 $\rho(x)=0$ 为原点的 δ 球 $C_0(\delta)$。

下面我们以符号 $T_\Lambda(\delta)$ 表示集合

$$\{y\in T_\Lambda M \mid |y|\leqslant\delta\}.$$

引理 设 $\tilde{\varphi}:T_\Lambda(\delta)\to T_\Lambda M$，满足当 $v\in T_x(\delta)$ 时，

$$\tilde{\varphi}(v)=g_x(v)\in T_{f(x)}M.$$

若 $g_x(v)$ 对任意固定的 $x\in\Lambda$ 都是 C^r 的，且导算子对 x 连续，则映射 $\varphi:C_b(\delta)\to C_b$，对 $\forall\rho\in C_b(\delta)$，$\varphi(\rho)$ 为

$$\varphi(\rho)(x)=\tilde{\varphi}\circ\rho(f^{-1}(x))$$

是 C^r 的，且对 $\forall\rho_0\in C_b(\delta)$，$\gamma\in C_b$，$x\in\Lambda$，

$$[D\varphi(\rho_0)(\gamma)](x)=[Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_0 f^{-1}(x))](\gamma(f^{-1}(x))).$$

证明 我们对 $r=1$ 证明。按定义，求 $D\varphi(\rho_0)$ 即求线性算子 A 使

$$\varphi(\rho_0+\varepsilon\gamma)-\varphi(\rho_0)-A\varepsilon\gamma=0(\varepsilon\|\gamma\|),$$

即使 $\varepsilon\to0$ 时，

$$\frac{\sup\limits_{x\in\Lambda}|\varphi(\rho_0+\varepsilon\gamma)(x)-\varphi(\rho_0)(x)-A\varepsilon\gamma(x)|}{\varepsilon\|\gamma\|}\to0.$$

令

$$\begin{aligned}\Delta=&\varphi(\rho_0+\varepsilon\gamma)(x)-\varphi(\rho_0)(x)\\&-Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_0 f^{-1}(x))(\varepsilon\gamma(f^{-1}(x)))\end{aligned}$$

$$= g_{f^{-1}(x)}(\rho_0 + \varepsilon\gamma)(f^{-1}(x)) - g_{f^{-1}(x)}(\rho_0)(f^{-1}(x))$$
$$- Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_0 f^{-1}(x))(\varepsilon\gamma(f^{-1}(x))).$$
$$= [Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_\varepsilon(f^{-1}(x)))$$
$$- Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_0(f^{-1}(x)))](\varepsilon\gamma(f^{-1}(x))),$$

其中 $\rho_\varepsilon(f^{-1}(x))$ 在 $T_{f^{-1}(x)}M$ 上 $\rho_0(f^{-1}(x))$ 与 $(\rho_0+\varepsilon\gamma)(f^{-1}(x))$ 之联线上。因为 $\varepsilon\to 0$ 时，$\rho_\varepsilon(x)\to\rho_0(x)$ 对 $x\in\Lambda$ 一致，因此由 $Dg_{f^{-1}(x)}$ 连续，可得当 $\varepsilon\to 0$，

$$\frac{\|\Delta\|}{\varepsilon\|\gamma\|}\leqslant\sup_{x\in\Lambda}\|Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_\varepsilon f^{-1}(x)) - Dg_{f^{-1}(x)}(\rho_0 f^{-1}(x))\|\to 0,$$

所以 φ 是 C^1 的。∎

定理 6.2 的证明 我们采用处理大范围问题时常用的方法，即先将有限维流形上不变集的问题化为无穷维空间中不动点的问题，然后应用不动点的稳定流形定理来得到结论。

(1) 设 d 是流形 M 上对 f 适应的度量，$\varepsilon>0$ 是使 $T_\Lambda M$ 中原点的 ε 邻域上指数映射 $\exp_x$，$x\in\Lambda$ 一致为同胚的正数。因 f 在 Λ 上一致连续，所以存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in\Lambda$，球 $B_\delta(x)$ 的 f 像在球 $B_\varepsilon(f(x))$ 之中。

定义映射 $\tilde\varphi: T_\Lambda(\delta)\to T_\Lambda M$ 如下：对 $\forall x\in\Lambda$，

$$\begin{array}{ccc} T_x(\delta) & \xrightarrow{\varphi} & T_{f(x)}M \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_x} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{f(x)}} \\ B_\delta(x) & \xrightarrow{f} & B_\varepsilon(f(x)) \end{array}$$

即对 $\forall x\in\Lambda$，$v\in T_x(\delta)$，

$$\tilde\varphi(v) = \exp_{f(x)}^{-1}\circ f\circ\exp_x(v).$$

显然 $\tilde\varphi(v)\in T_{f(x)}(\varepsilon)$。

再定义映射 $\varphi: C_b(\delta)\to C_b$。对 $\forall\rho\in C_b(\delta)$，令 $\varphi(\rho)$ 如下：对 $\forall x\in\Lambda$，

$$\varphi(\rho)(x) = \tilde\varphi\rho(f^{-1}(x)).$$

显然 $\rho=0\in C_b$ 是映射 φ 的不动点. 由引理可知 φ 是 C^r 的. 注意 $\exp_p(0)=p$ 与 $\operatorname{Dexp}_p(0)=\mathrm{id}$,还得到

$$[\mathrm{D}\varphi(0)\rho](x)=\mathrm{D}g_{f^{-1}(x)}(0)(\rho f^{-1}(x))$$
$$=\mathrm{D}f(f^{-1}(x))(\rho f^{-1}(x)).$$

记 $y=f^{-1}(x)$,就有

$$[\mathrm{D}\varphi(0)\rho](x)=\mathrm{D}f(y)\rho(y).$$

因为 Λ 是双曲集,它的切丛 $T_\Lambda M$ 可以直和分解如下:

$$T_\Lambda M=E^s\oplus E^u,$$

E^s 与 E^u 在 $\mathrm{D}f$ 作用下不变. 令 $C_b(E^s),C_b(E^u)$ 分别是定义在 Λ 上取值在 E^s,E^u 中的有界截面的集合, 显然 $C_b(E^s),C_b(E^u)$ 是 C_b 的子空间,且

$$C_b=C_b(E^s)\oplus C_b(E^u).$$

设 $v\in C_b(E^s)$,因为

$$[\mathrm{D}\varphi(0)v](x)=\mathrm{D}f(y)v(y),$$
$$x\in\Lambda,\ y=f^{-1}(x)\in\Lambda,\ v(y)\in E^s,$$

所以 $\mathrm{D}\varphi(0)$ 映 $C_b(E^s)$ 到 $C_b(E^s)$. 由于度量对 f 适应,所以

$$|[\mathrm{D}\varphi(0)v](x)|=|\mathrm{D}f(y)v(y)|\leqslant\lambda|v(y)|,\quad \lambda\in(0,1).$$

从而

$$\|\mathrm{D}\varphi(0)v\|\leqslant\lambda\|v\|.$$

总之, $\mathrm{D}\varphi(0)$ 限制在 $C_b(E^s)$ 上是收缩的. 类似地, $\mathrm{D}\varphi(0)$ 限制在 $C_b(E^u)$ 上是扩张的, 从而 $\mathrm{D}\varphi(0)$ 是双曲的. 我们已由 Λ 是 f 的双曲不变集得到 $\rho=0$ 是 C_b 上的 C^r 微分同胚 φ 的双曲不动点.

由双曲不动点的稳定流形定理得知, 存在 $\beta_1>0$ 与唯一的 C^r 映射 $\phi:B^s_{\beta_1}\to B^u_{\beta_2}$ (其中 $B^s_{\beta_1}\subset C_b(E^s)$, $B^u_{\beta_2}\subset C_b(E^u)$),使得 ϕ 的图像恰是 φ 在双曲不动点 $\rho=0$ 的邻域 $B_\beta\subset C_b$ 中的局部稳定流形. 以 (σ,τ) 表示截面 ρ 按子空间 $C_b(E^s)$ 与 $C_b(E^u)$ 的分解,以上结果就可表为:

$$\{(\sigma,\tau)=(\sigma,\phi(\sigma))|\sigma\in B^s_{\beta_1}\}=\{(\sigma,\tau)|\varphi^n(\sigma,\tau)\in B_\beta,\forall n\geqslant0\},$$

我们取 $(\exp_x^{-1}, B_\varepsilon(x))$ 为流形M在点 x 处的局部坐标卡.由于

$$\varphi(\sigma,\tau)(x) = \exp_x^{-1}\circ f\circ\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x)),\tau(f^{-1}(x)))$$
$$= \tilde{f}(\sigma(f^{-1}(x)),\tau(f^{-1}(x))),$$

其中$\tilde{f}=\exp_x^{-1}\circ f\circ\exp_{f^{-1}(x)}$为 f 导出的坐标卡中邻域 $B_\varepsilon(f^{-1}(x))\subset T_{f^{-1}(x)}M$ 到 $B_\varepsilon(x)\subset T_xM$ 上的映射，即φ将截面 ρ_1 映为截面 ρ_2 时，ρ_2 在点 x 处所取的向量为 $\rho_1(f^{-1}(x))$ 以$\tilde{f}$ 作用所得，所以，对 $\forall n\geqslant 0$,

$$\varphi^n(\sigma,\tau)(x) = \tilde{f}^n(\sigma(f^{-n}(x)),\tau(f^{-n}(x))),$$

其中 $\tilde{f}^n = \exp_x^{-1}\circ f^n\circ\exp_{f^{-n}(x)}$.

根据以上讨论可得到重要关系式:

$\tau = \phi(\sigma)$, $\sigma\in B^s_{\beta_1}\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x\in\Lambda$, $\exp_x(\sigma(x),\tau(x))\subset W^s_\beta(x)$.

此等价关系式成立是因为,

$$\begin{aligned}
&\tau = \phi(\sigma),\ \sigma\in B^s_{\beta_1}\\
\Longleftrightarrow\ &\varphi^n(\sigma,\tau)\in B_\beta,\ 对\ \forall n\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow\ &|\tilde{f}^n(\sigma(f^{-n}(x)),\ \tau(f^{-n}(x)))| < \beta,\\
&对\ \forall n\geqslant 0,\ \forall x\in\Lambda\\
\Longleftrightarrow\ &d(f^n\circ\exp_{f^{-n}(x)}(\sigma(f^{-n}(x)),\tau(f^{-n}(x)),\ x) < \beta,\\
&对\ \forall n\geqslant 0,\ \forall x\in\Lambda.
\end{aligned}$$

令 $y = f^{-n}(x)$,则

$$\begin{aligned}
&\varphi^n(\sigma,\tau)\in B_\beta,\ 对\ \forall n\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow\ &d(f^n(\exp_y(\sigma(y),\ \tau(y))),\ f^n(y)) < \beta,\\
&对\ \forall n\geqslant 0,\ \forall y\in\Lambda\\
\Longleftrightarrow\ &\exp_y(\sigma(y),\ \tau(y))\in W^s_\beta(y),\ 对\ \forall y\in\Lambda.
\end{aligned}$$

应用以上关系式可以证得，当 $\tau = \phi(\sigma)$ 时，$\tau(x)$ 由 $\sigma(x)$ (σ 在点 x 的值)所确定，而不依赖于整个截面σ(即不需要由σ得 $\phi(\sigma) = \tau$ 再得 $\tau(x)$). 事实上，如果 (σ,τ) 与 (σ',τ') 满足

$$\tau = \phi(\sigma), \ \tau' = \phi(\sigma'),$$

由以上关系式($\Longrightarrow$)可知，对 $\forall x \in \Lambda$ 有

$\exp_x(\sigma(x), \tau(x)) \in W^s_\beta(x)$ 与 $\exp_x(\sigma'(x), \tau'(x)) \in W^s_\beta(x)$. 若某 $x_0 \in \Lambda$ 使 $\sigma(x_0) = \sigma'(x_0)$ 而 $\tau(x_0) \neq \tau'(x_0)$,我们取截面

$$(\bar{\sigma}(x), \bar{\tau}(x)) = \begin{cases} (\sigma(x), \tau(x)), & \text{当 } x \in \Lambda, \ x \neq x_0, \\ (\sigma(x_0), \tau'(x_0)), & \text{当 } x = x_0. \end{cases}$$

由上关系式($\Longleftarrow$)就得知 $\bar{\tau} = \phi(\bar{\sigma})$. 因为 $\bar{\sigma} = \sigma$, 所以应该有 $\bar{\tau} = \tau$. 但

$$\bar{\tau}(x_0) = \tau'(x_0) \neq \tau(x_0),$$

矛盾.

我们令

$$E^s_\beta = \{v = \sigma(x) \mid x \in \Lambda, \ \sigma \in B^s_{\beta_1}\}.$$

定义映射 $g: E^s_\beta \to E^u$ 为

$$g(v) = \phi(\sigma)(x),$$

即
$$g(\sigma(x)) = \phi(\sigma)(x) = \tau(x).$$

由以上讨论可知此定义是合理的.

进一步定义映射 $h: E^s_\beta \to M$ 为：当 $x \in \Lambda, \sigma \in B^s_{\beta_1}, v = \sigma(x)$ 时,

$$\begin{aligned} h(v) &= \exp_x(v, g(v)) \\ &= \exp_x(\sigma(x), \phi(\sigma)(x)). \end{aligned}$$

显然,取定 $x \in \Lambda$, h 限制在 $E^s_\beta(x)$ 上的像$\subset W^s_\beta(x)$. 反之,若有 $(u, w) \in T_{x_0}(\beta)$ 使 $\exp_{x_0}(u, w) \in W^s_\beta(x_0)$, 我们取 $(\sigma, \tau) \in C_b(\beta)$ 如下

$$(\sigma(x), \tau(x)) \equiv \begin{cases} (u, w), & \text{当 } x = x_0, \\ (0, 0), & \text{当 } x \in \Lambda, \ x \neq x_0. \end{cases}$$

因为对任意 $x \in \Lambda$, $x \neq x_0$, 有

$$\exp_x(0, 0) = x \in W^s_\beta(x),$$

所以应用重要关系式($\Longleftarrow$)得知此截面 (σ, τ) 满足 $\tau = \phi(\sigma)$. 即点

$$\exp_{x_0}(u,w)=\exp_{x_0}(\sigma(x_0),\phi(\sigma)(x_0))$$

属于 h 限制在 $E^s_\beta(x_0)$ 上的像. 总之，取定 $x\in\Lambda$，当 h 限制在 $E^s_\beta(x)$ 上时，它的像就是 $W^s_\beta(x)$.

由双曲不动点的稳定流形定理知 ϕ 的图像 $\{(\sigma,\phi(\sigma)),\ \sigma\in B^s_{B_1}\}$（映射 φ 在双曲不动点零截面处的局部稳定流形）是 Banach 空间 C_b 中的 C^r 嵌入子流形 $(B^s_{B_1},\phi(B^s_{B_1}))$. 取定一个 $x\in\Lambda$，即限制在 T_xM 上

$$\{(\sigma(x),\ \phi(\sigma)(x)),\ \sigma(x)\in E^s_\beta(x)\}$$

是 C^r 嵌入的，再经过指数映射 $\exp_x$，成为 M 中过点 x 的 C^r 嵌入子流形. 总之，对 $x\in\Lambda$，h 限制在 $E^s_\beta(x)$ 上的像，即 $W^s_\beta(x)$，是 M 中 C^r 嵌入子流形.

（2）为了证明在点 $x_0\in\Lambda$，$W^s_\beta(x_0)$ 与 $E^s_\beta(x_0)\subset T^s_{x_0}M$ 相切，只需证明在 $T_{x_0}M$ 上流形

$$\{\sigma(x_0),\phi(\sigma)(x_0)),\ \sigma(x_0)\in E^s_\beta(x_0)\}$$

在 x_0 处与 $E^s_\beta(x_0)$ 相切. 为此考虑

$$\frac{|\phi(\sigma)(x_0)-\phi(0)(x_0)|}{|\sigma(x_0)-o(x_0)|}=\frac{|(\phi(\sigma)-\phi(0))(x_0)|}{|\sigma(x_0)|}.$$

因为 $\phi(\sigma)(x_0)$ 由 $\sigma(x_0)$确定，所以无妨取 σ 使 $\|\sigma\|=|\sigma(x_0)|$，于是

$$\frac{|\phi(\sigma)(x_0)-\phi(0)(x_0)|}{|\sigma(x_0)-o(x_0)|}\leqslant\frac{\|\phi(\sigma)-\phi(0)\|}{\|\sigma\|}.$$

根据第四章命题 4.8 知 $D\phi(0)$ 是零映射，即

$$\phi(\sigma)-\phi(0)=o(\|\sigma\|),$$

所以当 $\|\sigma\|=|\sigma(x_0)|$ 充分小时，上不等式右端可以任意小. 相切性得证.

（3）不难看出，（1）中定义的映射 φ 限制在连续截面空间中 $C_0(\delta)$ 上时的像也在 C_0 中. 又截面 $\rho=0\in C_0(\delta)$ 也是 φ 在 C_0 中的双曲不动点. 同样可证明在 C_0 中映射 φ 对双曲不动点 $\rho=0$ 也有局部稳定流形，它是 C_b 中局部稳定流形在 C_0 中的子

集合．但是，对任一点 $x_0\in\Lambda$，其稳定流形

$$W^s_\beta(x_0)=\{\exp_{x_0}(\sigma(x_0),\ \phi(\sigma)(x_0)),\ \sigma\in B^s_{\beta_1}\},$$

考虑其中 $B^s_{\beta_1}\subset C_0(E^s)$ 或 $B^s_{\beta_1}\subset C_b(E^s)$ 都是同一集合．这是因为 $C_0\subset C_b$，而在 C_b 中 $\sigma(x_0)$ 是完全确定 $\phi(\sigma)(x_0)$ 的．这样一来，可以认为稳定流形族

$$\{W^s_\beta(x)\}_{x\in\Lambda}=\{\exp_x(\sigma(x),\phi(\sigma)(x))\}_{x\in\Lambda},$$

其中 $(\sigma,\phi(\sigma))\in C_0$．这个流形族对 x 的连续性可以由 ϕ 对截面的连续性与截面对 x 的连续性得到．

按注中定义检验流形族$\{W^s_\beta(x)\}_{x\in\Lambda}$ 的连续性，可参看[5]．∎

推论 1 （1）对任何 $x\in\Lambda,\beta<\frac{\varepsilon}{2}$ （$\varepsilon>0$ 是使 $T_\Lambda M$ 中原点的 ε 邻域上指数映射 $\exp_x$ 一致为同胚的正数），$y,z\in W^s_\beta(x)$，$y\in\Lambda$，有

$$d(f^n(y),\ f^n(z))\leqslant\lambda^n d(y,z),\quad \lambda\in(0,1),\ \forall n\geqslant 0.$$

（2）对任意 $x,x'\in\Lambda$，$W^s_\beta(x)\cap W^s_\beta(x')$ 在 $W^s_\beta(x)$ 中开．

证明 （1）因 $y,z\in W^s_\beta(x)$，所以对一切 $n\geqslant 0$ 有

$$d(f^n(y),f^n(x))<\beta\quad 与\quad d(f^n(z),f^n(x))<\beta.$$

从而

$$d(f^n(y),\ f^n(z))<2\beta,$$

于是得知

$$z\in W^s_{2\beta}(y).$$

设 $z=\exp_y(v,g(v))$ （$2\beta<\varepsilon$，指数映射有意义），则对 $\forall n\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}d(f^n(z),f^n(y))&=|\exp^{-1}_{f^n(y)}f^n(z)|\\&=|\exp^{-1}_{f^n(y)}\circ f^n\circ\exp_y(v,g(v))|\\&=|\tilde{\varphi}^n(v,g(v))|.\end{aligned}$$

由双曲不动点的稳定流形的性质（定理 4.7 的引理的推论 1）可知，对 $\forall$ 截面 $a,b\in\phi$ 的图像(映射 φ 的双曲不动点零截面的稳定流形)有

$$\|\varphi^n(a)-\varphi^n(b)\|\leqslant\lambda^n\|a-b\|,\quad \lambda\in(0,1),\ \forall n\geqslant 0.$$

我们取 $b=0$，再类似于定理的证明(1)中取 a，使

$$a(x)=\begin{cases}(v,g(v)), & 当\ x=y,\\ (0,0), & 当\ x\neq y,\ x\in\Lambda.\end{cases}$$

由 $\varphi(\rho)(x)=\tilde{\varphi}(\rho(f^{-1}(x)))$ 得

$$\varphi^n(\rho)(x)=\tilde{\varphi}^n\rho(f^{-n}(x)),$$

所以 $\tilde{\varphi}^n a(y)=\varphi^n(a)(f^n(y))$,

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}^n(v,g(v))|&\leqslant\|\varphi^n(a)\|\leqslant\lambda^n\|a\|=\lambda^n|(v,g(v))|\\&=\lambda^n|\exp_y^{-1}z|=\lambda^n d(z,y).\end{aligned}$$

(1)得证.

(2) 设 $y\in W^s_\beta(x)\cap W^s_\beta(x')$, $z\in W^s_\beta(x)$. 由(1)知

$$\begin{aligned}d(f^n(z),f^n(x'))&\leqslant d(f^n(z),f^n(x))+d(f^n(x),f^n(y))\\&\quad+d(f^n(y),f^n(x'))\\&\leqslant\lambda^n[d(z,x)+d(x,y)+d(y,x')]\\&\leqslant 3\beta\lambda^n.\end{aligned}$$

因此，存在 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，对 $\forall z\in W^s_\beta(x)$，有

$$d(f^n(z),f^n(x'))<\beta.$$

由(1)，存在 $\delta>0$，当 z 接近 y 使得 $d(y,z)<\delta$ 时有下列不等式成立：

$$d(f^n(y),f^n(z))<\beta-d(f^n(y),f^n(x')),$$
$$n=0,1,\cdots,n_0.$$

即

$$d(f^n(z),\ f^n(x'))<\beta,\quad n=0,1,\cdots,n_0,$$

总之，对于 $y\in W^s_\beta(x)\cap W^s_\beta(x')$, $\forall z\in W^s_\beta(x)$，只要 $d(z,y)<\delta$，就有 $z\in W^s_\beta(x')$，即 $z\in W^s_\beta(x)\cap W^s_\beta(x')$. (2)得证. ▮

注：由(1)得知，当 $y\in W^s_\beta(x)$ 时，

$$d(f^n(y),f^n(x))\leqslant\lambda^n d(y,x)<d(y,x).$$

所以，对于 $\beta'<\beta$,

$$W^s_{\beta'}(x)=\{y\in W^s_\beta(x)\,|\,d(y,x)<\beta'\}.$$

下面的推论指出局部稳定流形与整体稳定流形的关系。

推论 2　当 $x\in\Lambda$ 时，有

(1) $W_B^s(x)\subset W^s(x)$，$W_B^u(x)\subset W^u(x)$；

(2) $W^s(x)=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_B^s(f^k(x)))$，

$$W^u(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(W_B^u(f^{-k}(x))).$$

证明　(1) 由推论 1 的(1)立刻得到.

(2) 由稳定流形定义，显然对 $\forall k\geqslant 0$ 有

$$W^s(x)=f^{-k}(W^s(f^k(x))),$$

所以

$$W^s(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W^s(f^k(x))).$$

由(1)得

$$W^s(x)\supset\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_B^s(f^k(x))).$$

另一方面，设 $y\in W^s(x)$，则存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，

$$d(f^n(x),f^n(y))<\beta.$$

因此，对 $\forall n\geqslant N, f^n(y)\in W_B^s(f^n(x))$，即

$$y\in f^{-n}(W_B^s(f^n(x))).$$

所以

$$y\in\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_B^s(f^k(x))).$$

总之，有

$$W^s(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_B^s(f^k(x))).$$

类似地

$$W^u(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(W_B^u(f^{-k}(x))).\ \blacksquare$$

注：不难看出可以改(2)中的 $k=0,1,\cdots$ 为 n_k，$n_k\in Z^+$，$n_k\nearrow+\infty$。

命题6.3 设 $x\in\Lambda$，则存在 C^r 微分同胚 g_x，它将 T_xM 在原点O附近的某一球形邻域映到M上点 x 附近的某一球形邻域，且满足下列条件：

$$g_x(O)=x,\ g_x^{-1}(W_\beta^s(x))\subset E_x^s,\ g_x^{-1}(W_\beta^u(x))\subset E_x^u.$$

证明 若 $y\in T_xM$，则有 y 的直和分解 $y=y^s+y^u$，其中 $y^s\in E_x^s$，$y^u\in E_x^u$。设 $\exp_x^{-1}W_\beta^s(x)$ 是函数 $\phi^s:E_x^s\to E_x^u$ 的图像，$\phi^s(0)=0$；$\exp_x^{-1}(W_\beta^u(x))$ 是函数 $\phi^u:E_x^u\to E_x^s$ 的图像，$\phi^u(0)=0$。令 $\varphi:T_xM\to T_xM$，使

$$\varphi(y)=[y^s+\phi^u(y^u)]+[y^u+\phi^s(y^s)],$$

则 $g_x=\exp_x\circ\varphi$ 就满足命题的要求。事实上，由于 ϕ^s,ϕ^u 是 C^r 的，因此 g_x 是 C^r 的。又

$$D\varphi=I+\begin{pmatrix}0 & D\phi^u\\ D\phi^s & 0\end{pmatrix},$$

而 $D\phi^s,D\phi^u$ 在原点O为零，所以在原点O附近φ是 C^r 同胚，从而 g_x 是 T_xM 上原点O附近的 C^r 微分同胚。▮

§6.3 双曲集的局部乘积结构

本节中我们先引入一类具有特殊结构的双曲集，这种结构称为**局部乘积结构**或**典型坐标**。然后定义 Anosov 微分同胚与公理A微分同胚。再证明 Anosov 微分同胚的全流形M与公理A微分同胚的非游荡点集Ω都具有这种结构。

以下命题指出双曲集的一个性质。

命题6.4 设Λ是微分同胚 f 的紧、双曲集，则对任意小的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$，使得当 $x,y\in\Lambda$，$d(x,y)<\delta$ 时，有唯一的一点 z，$z\in W_\varepsilon^s(x)\cap W_\varepsilon^u(y)$。$z$ 记作 $[x,y]$。这样确定的映射

$$[\cdot,\cdot]:\{(x,y)\in\Lambda\times\Lambda \mid d(x,y)<\delta\}\to M$$

是连续的，并且，$W^s_\varepsilon(x)$ 与 $W^u_\varepsilon(y)$ 在 z 处横截相交.

证明 取定 $x\in\Lambda$，应用命题 6.3，上述问题可化到欧氏空间 T_xM 的原点附近来讨论. T_xM 上向量记作 ξ，

$$\xi=\xi^s+\xi^u,$$

其中 $\xi^s\in E^s=E^s_x$，$\xi^u\in E^u=E^u_x$. 于是 $W^s_\varepsilon(x)$ 与 $W^u_\varepsilon(x)$ 的方程分别为

$$\xi^u=0,\quad |\xi^s|<\varepsilon$$

与

$$\xi^s=0,\quad |\xi^u|<\varepsilon.$$

由双曲集的性质与其稳定流形定理可知，对于接近点 x 的点 $y\in\Lambda$，存在同胚 $\rho(y):W^u_\varepsilon(x)\to W^u_\varepsilon(y)$. 又记 $\xi=\xi^s+\xi^u$ 到 ξ^u 的投影为 π，我们考虑映射 $\rho(y,\cdot)$: $E^u(\varepsilon)\to E^u$: 对 $\forall w\in E^u(\varepsilon)$，

$$\rho(y,w)=\pi\circ\rho(y)(0,w).$$

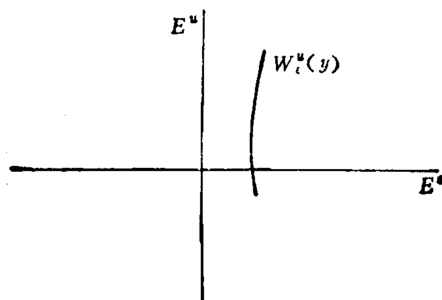


图 6.1

于是，为证 $d(x,y)$ 充分小时 $W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)$ 有唯一一个点，只要证此时有唯一一个 $w=w(y)$，使 $\rho(y,w(y))=0$.

显然 $\rho(x,0)=0$，$\rho(x,\cdot)$ 是恒同映射，所以 $D_w\rho(x,w)=I$，根据隐函数定理可知，存在 δ_x，使当 $d(x,y)<\delta_x$ 时，方

程 $\rho(y,w)=0$ 的解 $w=w(y)$, $|w|<\varepsilon$ 唯一存在. 由于 $W^s_\varepsilon(x)$ 与 $W^u_\varepsilon(x)$ 横截相交, $\{W^u_\varepsilon(y)\}_{y\in\Lambda}$ 对 y 连续与横截相交的开性,若需要,再缩小 δ_x, 就得到 $W^s_\varepsilon(x)$ 与 $W^u_\varepsilon(y)$ 横截相交.

因 Λ 紧,可以证明(从略)存在一个一致的 $\delta>0$,满足命题的要求.

$[\cdot,\cdot]$的连续性可由以上推导过程中看到. ▮

注: 命题 6.4 中的点 $[x,y]\in M$,但不一定有 $[x,y]\in\Lambda$.

定义 对于双曲集 Λ,如果存在 $\varepsilon>\delta>0$, 使得对一切 x, $y\in\Lambda$, $d(x,y)<\delta$,都有

$$[x,y]=W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)\in\Lambda,$$

则称双曲集 Λ 具有**局部乘积结构**或具有**典型坐标**.

直观上,如果 Λ 有局部乘积结构,则在 $x\in\Lambda$ 的某一邻域 U 内, $\Lambda\cap U$ 中的点的局部稳定流形与局部不稳定流形构成 U 内的一个"网格",而"格点"也都是 $\Lambda\cap U$ 中的点. 下面是二维、三维情况的示意图.

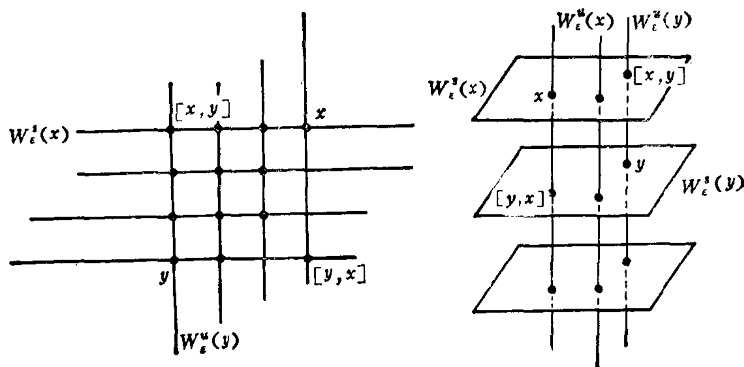


图 6.2

由命题 6.4 与局部乘积结构的定义得到下面的推论:

推论 1 若双曲集 Λ 有局部乘积结构,则当 $x,y,u,v\in\Lambda$, 且

充分接近时就有

$$[[x,y],[u,v]]=[x,v],$$

从而

$$[[x,y],[y,x]]=[x,x]=x,$$

$$[[x,y],v]=[x,v].$$

证明 设 $\varepsilon>\delta>0$ 有局部乘积结构定义中所述之性质. 按命题 6.4 对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 定出 $\delta_1\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$, 又对 $\frac{\delta_1}{3}$ 定出 $\delta_2\in\left(0,\frac{\delta_1}{3}\right)$. 当 x,y,u,v 两两接近到 δ_2 时, 有

$$[x,y]\in W^s_{\frac{\delta_1}{3}}(x)\subset W^s_{\frac{\varepsilon}{2}}(x),\ [u,v]\in W^u_{\frac{\delta_1}{3}}(v)\subset W^u_{\frac{\varepsilon}{2}}(v).$$

注意,此时 $[x,y],[u,v]$ 接近到 δ_1,从而,令 $z=[[x,y],[u,v]]$ 就有

$$z\in W^s_{\frac{\varepsilon}{2}}([x,y]),\ z\in W^u_{\frac{\varepsilon}{2}}([u,v]).$$

由以上所得,知 $z\in W^s_\varepsilon(x)$, $z\in W^u_\varepsilon(v)$. 因为 $d(x,v)<\delta_2<\delta$, 由唯一性 $z=[x,v]$. ∎

以下推论指出此种结构称为 Λ 的局部乘积结构或典型坐标的原因. 我们取符号

$$\widetilde{W}^s_\varepsilon(x)=W^s_\varepsilon(x)\cap\Lambda,\ \widetilde{W}^u_\varepsilon(x)=W^u_\varepsilon(x)\cap\Lambda.$$

推论 2 设 Λ 有局部乘积结构, η 充分小,则对 $\forall x\in\Lambda$,

(1) 映射 $[\cdot,x]:\widetilde{W}^u_\eta(x)\to M$ 与 $[x,\cdot]:\widetilde{W}^s_\eta(x)\to M$ 都是包含映射.

(2) 映射 $[\cdot,\cdot]:N=\widetilde{W}^u_\eta(x)\times\widetilde{W}^s_\eta(x)\to M$ 是 N 到 x 在 Λ 中某邻域上的同胚.

证明 (1) 由定义是显然的.

(2) 考虑任一 $y\in\Lambda$, y 与 x 充分接近. 由推论 1,

$$y=[[y,x],[x,y]].$$

由局部乘积的定义,点

$$[y,x]\in W^u_\eta(x)\cap\Lambda=\widetilde{W}^u_\eta(x),$$
$$[x,y]\in\widetilde{W}^s_\eta(x),$$
所以映射 $[\cdot,\cdot]$ 将 $N=\widetilde{W}^u_\eta(x)\times\widetilde{W}^s_\eta(x)$ 映满 x 在 Λ 中的某一邻域.

设 $y,y'\in\widetilde{W}^u_\eta(x)$, $z,z'\in\widetilde{W}^s_\eta(x)$, $[y,z]=[y',z']$. 于是
$$[x,[y,z]]=[x,[y',z']].$$
从而
$$[x,z]=[x,z'].$$
由(1), $[x,\cdot]:\widetilde{W}^s_\eta(x)\to M$ 是包含映射,所以,
$$[x,z]=z,\ [x,z']=z'.$$
因此 $z=z'$. 同理可得 $y=y'$. 所以 $[\cdot,\cdot]$: $N\to M$ 是单的.

因为在映射 $[\cdot,\cdot]$ 之下,N 的像点 y 可表为
$$y=[[y,x],[x,y]].$$
由命题 6.4,$[\cdot,\cdot]$连续,所以 $[\cdot,\cdot]$是N到 x 在 Λ 中某邻域上的同胚. ▮

定义 M是紧 Riemann 流形,称微分同胚 $f:M\to M$ 为 Anosov 的,如果整个流形M是 f 的双曲不变集.

定义 M是紧 Riemann 流形,称微分同胚 $f:M\to M$ 为**公理A微分同胚**,如果

(1) f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 是双曲集;

(2) f 的周期点集 $P(f)$ 有 $\overline{P(f)}=\Omega(f)$.

例 二维环面 T^2 上的双曲线性自同构 A 是公理A微分同胚,也是 Anosov 微分同胚.

由局部乘积的定义立刻有以下定理:

定理 6.5 若M是紧 Riemann 流形, $f:M\to M$ 是 Anosov 微分同胚,则M有局部乘积结构.

为证明公理A微分同胚 f 的非游荡点集(双曲集)具有局部乘积结构,先证明几个引理.

引理 1 设 f 是 Banach 空间 E 中的双曲线性自同构, E 可

直和分解 $E=E^s\oplus E^u$，其中 E^s,E^u 是稳定子空间，不稳定子空间。若U是E中非空开集，$U\cap E^s\neq\varnothing$，则

$$\overline{\bigcup_{m>0} f^m(U)}\supset E^u.$$

证明 由图 6.3 可见，不难直接验证。▌

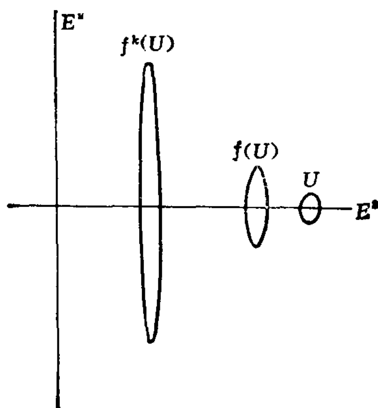


图 6.3

引理 2 设 $f:M\to M$ 是微分同胚，p,q 是 f 的双曲周期点。U 是M中非空开集，$U\cap W^s(p)\neq\varnothing$，则

(1) $\overline{\bigcup_{m>0} f^m(U)}\supset W^u(p)$.

(2) 若又有 $W^u(p)$ 与 $W^s(q)$ 横截相交，$W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$，则

$$W^s(q)\cap\left(\bigcup_{m>0} f^m(U)\right)\neq\varnothing.$$

证明 先设 p,q 是 f 的双曲不动点。

(1) 由不稳定流形 $W^u(p)$ 的定义，我们只需证明对点p的某一邻域V下式成立即可。

$$\overline{\bigcup_{m>0} f^m(U)} \supset W^u(p) \cap V_\circ$$

另一方面，因为对 p 的稳定流形 $W^s(p)$ 有

$$U \cap W^s(p) \neq \varnothing,$$

所以存在 $n_0 > 0$ 使

$$f^{n_0}(U) \cap (W^s(p) \cap V) \neq \varnothing.$$

这样一来，问题可以化到点 p 的邻域 V 中考虑。

我们按 Hartman 定理选择点 p 的邻域 V 使得在 V 中微分同胚 f 拓扑共轭于其在点 p 的导算子 $Df(p)$。对双曲线性自同构 $Df(p)$ 应用引理 1，(1)得证。

(2) 仍取(1)中所选之邻域 V，在 V 上 f 拓扑共轭于 $Df(p)$。设 x 为 $W^u(p)$ 与 $W^s(q)$ 横截相交之交点，则存在 $l \in \boldsymbol{Z}^+$ 使 $f^{-l}(x) \in V$。注意 $W^u(p)$ 与 $W^s(q)$ 都是 f 不变的，所以

$$f^{-l}(x) \in W^u(p) \cap W^s(q),$$

并且 $f^{-l}(x)$ 仍是 $W^u(p)$ 与 $W^s(q)$ 的横截交点。另一方面，存在 $n_0 \in \boldsymbol{Z}^+$，使得

$$f^{n_0}(U) \cap (W^s(p) \cap V) \neq \varnothing.$$

这样一来，问题又可到邻域 V 中考虑，而对于双曲线性自同构，(2)要证明的结果是显然的(见图 6 ·)。

当 p, q 是 f 的 m, n 周期点时，考虑微分同胚 $f^k(k = mn)$，p, q 是 f^k 的双曲不动点。∎

引理 3 (雾状引理) 设 $f: M \to M$ 是微分同胚，$p_i(i = 0, \cdots, n)$ 是 f 的周期点，且 $p_n = p_0$。$x_i \in W^u(p_i) \cap W^s(p_{i+1})$ 是横截交点，$i = 0, \cdots, n-1$。则 $x_i(i = 0, \cdots, n-1)$ 都是非游荡点。

证明 取 x_i 在 M 中的邻域 U_i，由引理 2(2)与归纳法，对每一个 $i(i = 0, \cdots, n-1)$，都有

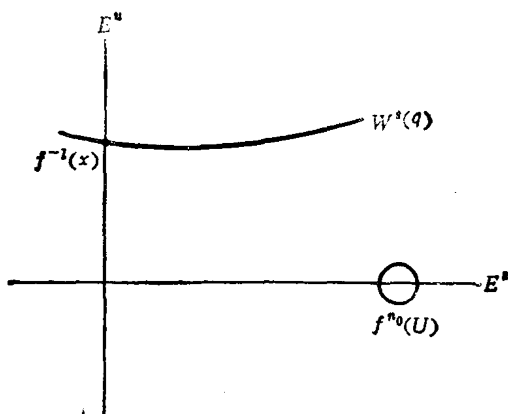


图 6.4

$$W^s(p_j)\cap\left(\bigcup_{m>0}f^m(U_i)\right)\neq\varnothing.$$

特别,取 $j=i$, 再应用引理2(1)就有

$$\overline{\bigcup_{m>0}f^m(U_i)}\supset W^u(p_i),$$

所以

$$\bigcup_{m>0}f^m(U_i)\cap U_i\neq\varnothing.$$

于是 x_i 是非游荡点 ($i=0,\cdots,n-1$). ▮

定理6.6 设M是紧 Riemann 流形, $f: M\to M$ 是公理A微分同胚,则f的非游荡点集 $\Omega(f)$ 具有局部乘积结构.

证明 由设 $\Omega(f)$ 是紧双曲集,所以只须证明 $\exists\varepsilon>\delta>0$, 使 $\forall x,y\in\Omega(f)$, $d(x,y)<\delta$, 就有

$$[x,y]=W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)\in\Omega(f).$$

由命题 6.4 知,存在 $\varepsilon>\delta>0$,使当 $x,y\in\Omega(f)$, $d(x,y)<\delta$ 时, $W^s_\varepsilon(x)$ 与 $W^u_\varepsilon(y)$ 横截相交于点 $[x,y]$. 取 $[x,y]$ 在M中的任一邻域U. 因为f的周期点在 $\Omega(f)$ 中稠,映射 $[\cdot,\cdot]$ 连续,所以存在充分接近 x,y 的周期点 p,q,使 $d(p,q)<\delta$,$[p,q]$

$\in U$. 由命题 6.4, $[p,q]$, $[q,p]$ 都是横截相交点，应用雾状引理得知 $[p,q]\in\Omega(f)$. 因 $\Omega(f)$ 是闭集，所以 $[x,y]\in\Omega(f)$. ∎

§6.4 谱分解定理

M是紧 Riemann 流形，$f:M\to M$ 是公理 A 微分同胚，f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 可以进行谱分解，从而给出 $\Omega(f)$ 的基本轮廓。下一章中的 Markov 分割还要对 $\Omega(f)$ 进行更细致的讨论。

定理 6.7（谱分解定理） M是紧 Riemann 流形，$f:M\to M$ 是公理A微分同胚，$\Omega(f)$ 是 f 的非游荡点集，则

(1) $\Omega(f)=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_s$, 其中 $\Omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是互不相交的闭集，且 $f(\Omega_i)=\Omega_i$, $f|\Omega_i$ 是拓扑传递的.

(2) $\Omega_i=X_{1,i}\cup X_{2,i}\cup\cdots\cup X_{n_i,i}$,其中 $X_{j,i}(1\leqslant j\leqslant n_i)$是互不相交的闭集，且 $f(X_{j,i})=X_{j+1,i}$ $(X_{n_i+1,i}=X_{1,i})$, $f^{n_i}|X_{1,i}$ 是拓扑混合的.

证明 因 $\Omega(f)$ 是紧、双曲集，有局部乘积结构，取 $\varepsilon>\delta>0$, 如局部乘积定义所要求.设点 $p\in P(f)$, 周期为 m. 考虑集合

$$X_p=\overline{W^u(p)\cap\Omega(f)}\subset\Omega(f).$$

下面来证明，某些 X_p 就是定理结论(2)中所提到的那种 $X_{j,i}$.

(a) 证明 $X_p=B_\delta(X_p)$, 其中

$$B_\delta(X_p)=\{y\in\Omega(f)|d(y,X_p)<\delta\}.$$

显然 $X_p\subset B_\delta(X_p)$, 所以只需证 $B_\delta(X_p)\subset X_p$ 即可.

因为 $P(f)$ 在 $\Omega(f)$ 中稠，所以只要证明，当 $q\in P(f),q\in B_\delta(X_p)$ 时，有 $q\in X_p$. 这是因为，否则，有点 $x_0\in\Omega(f)$, $x_0\in B_\delta(X_p)$ 但 $x_0\bar{\in}X_p$. 从而 $\exists x_0$ 在 $\Omega(f)$ 中的邻域 U_{x_0},$U_{x_0}\subset B_\delta(X_p)$, 但 $U_{x_0}\cap X_p=\varnothing$. 于是有周期点 $q\in U_{x_0}$, 使 $q\in B_\delta(X_p)$,但 $q\bar{\in}X_p$.

现设 $q\in B_\delta(X_p)$,周期为 n. 由 $B_\delta(X_p)$ 的定义，

$$\exists x \in W^u(p) \cap \Omega(f),$$

使 $d(q,x) < \delta$. 注意 $\Omega(f)$ 有局部乘积结构，所以

$$x' = [q,x] \in W^s_\varepsilon(q) \cap W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega(f) \subset W^s(q) \cap W^u(p) \cap \Omega(f).$$

因 $x' \in W^s(q)$，故当 $k \to +\infty$ 时，

$$d(f^{kmn}(x'),q) = d(f^{kmn}(x'),f^{kmn}(q)) \to 0.$$

因 $x' \in W^u(p) \cap \Omega(f)$，故对任意 k，

$$f^{kmn}(x') \in f^{kmn}(W^u(p)) = W^u(f^{kmn}(p)) = W^u(p),$$

且 $f^{kmn}(x') \in \Omega(f)$. 所以

$$q \in \overline{W^u(p) \cap \Omega(f)} = X_p.$$

(b) 证明，如果 $q \in P(f)$, $q \in X_p$, 则 $X_q = X_p$.

因为 $q \in X_p$，所以

$$W^u_\delta(q) \cap \Omega(f) \subset B_\delta(X_p).$$

由(a)得

$$W^u_\delta(q) \cap \Omega(f) \subset X_p.$$

由定理 6.2 推论 2 知

$$W^u(q) = \bigcup_{k \geq 0} f^{kmn}(W^u_\delta(q)),$$

所以

$$\begin{aligned} W^u(q) \cap \Omega(f) &= \bigcup_{k \geq 0} f^{kmn}(W^u_\delta(q)) \cap \Omega(f) \\ &= \bigcup_{k \geq 0} f^{kmn}(W^u_\delta(q) \cap \Omega(f)) \\ &\subset \bigcup_{k \geq 0} f^{kmn}(X_p). \end{aligned}$$

因 X_p 是 f^m 不变的，闭的，于是得到

$$X_q \subset X_p.$$

如果可以证得 $p \in X_q$，则同理可得 $X_p \subset X_q$，从而 $X_p = X_q$. (b) 得证.

事实上，由于 $q \in X_p$，故存在 $x \in W^u(p) \cap \Omega(f)$，使

$$d(x,q)<\delta.$$

由 $x\in\Omega(f), d(x,q)<\delta, q\in X_q$ 得

$$x\in B_\delta(X_q)=X_q.$$

因为 X_q 是 f^n 不变的，所以对 $\forall k\in \boldsymbol{Z}^+$,

$$f^{-kmn}(x)\in X_q.$$

因 $x\in W^u(p)$，所以当 $k\to+\infty$ 时，

$$d(f^{-kmn}(x),p)=d(f^{-kmn}(x),f^{-kmn}(p))\to 0,$$

于是 $p\in X_q$.

(c) 由 (a)，X_p 与 X_q 都是度量空间 $\Omega(f)$ 中的开集. 若 $X_p\cap X_q\neq\varnothing$，则 $X_p\cap X_q$ 是 $\Omega(f)$ 中开集. 由于

$$\overline{p(f)}=\Omega(f),$$

必有周期点 $r\in X_p\cap X_q$，从而 $X_p=X_r=X_q$. 故任意 X_p 与 X_q 或不交或重合.

因为 $\overline{P(f)}=\Omega(f)$，所以

$$\Omega(f)=\bigcup_{p\in P(f)}B_\delta(X_p)=\bigcup_{p\in P(f)}X_p,$$

于是 $X_p(p\in P(f))$ 是紧 $\Omega(f)$ 的开覆盖. 因此存在有限个周期点 $p_1,\cdots,p_N$，使得

$$\Omega(f)=X_{p_1}\cup X_{p_2}\cup\cdots\cup X_{p_N},$$

且 $X_{p_k}(1\leqslant k\leqslant N)$ 互不相交. 显然，下标不唯一，但集合是唯一的一组.

因为 $\Omega(f)$ 是 f 的不变集，注意 $f(X_{p_k})=X_{f(p_k)}$，所以改换下标之后的 $p_k(1\leqslant k\leqslant N)$ 组成有限条 (s 条) 周期轨道. 将属于同一周期轨道的 p_k 所对应的 X_{p_k} 分在一组，它们的并集就是定理结论(1)中的 $\Omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$. 每一组中的 X_{p_k} 重新编号就得到定理结论(2)中的 $X_{j,i}$.

(d) 不难看出定理结论(1)中的拓扑传递性可以由(2)中的拓扑混合性得到. 而为证(2)中的拓扑混合性只需证明: 若 $f^N(X_r)=X_r$，则 $f^N: X_r\to X_r$ 是拓扑混合的.

设 U,V 是 X_r 中的非空开集，我们来证对充分大的 $t\in \mathbf{Z}^+$，

$$f^{tN}(V)\cap U\neq\emptyset.$$

取 $p\in U$，$q\in V$，$p,q\in P(f)$，周期分别是 m,n.

对 $\forall t\in \mathbf{Z}^+,\exists k,j\in \mathbf{Z}^+$，$0\leqslant j< mn$，使

$$tN=kmn-j.$$

显然，有上述性质的 j 使

$$f^j(p)=f^{-tN}(p)\in X_r=X_q,$$

从而存在点 $x_j\in f^j(U)\cap W^u(q)$.

因为 $x_j\in W^u(q)$，所以当 $k\to+\infty$ 时，

$$d(f^{-kmn}(x_j),q)=d(f^{-kmn}(x_j),f^{-kmn}(q))\to 0.$$

由于 j 最多有 mn 个，所以 $\exists k_0$，当 $k\geqslant k_0$ 时，对 $\forall x_j,j=0,\cdots,mn$，

$$f^{-kmn}(x_j)\in V.$$

因 $x_j\in f^j(U)$ 即 $f^{-j}(x_j)\in U$，得

$$f^{-kmn}(x_j)=f^{-tN}(f^{-j}(x_j))\in f^{-tN}(U).$$

总之，对充分大的 $t\in \mathbf{Z}^+$（从而 k 充分大），就有

$$f^{-kmn}(x_j)\in V\cap f^{-tN}(U),$$

即

$$f^{tN}(V)\cap U\neq\emptyset. \blacksquare$$

定义 谱分解定理结论(1)中所描述的集合 $\Omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 称为 f 的**基集**.

由于 $\Omega(f)=\Omega(f^{-1})$，又 f 的基集 Ω_i 在 f 作用下不变，从而在 f^{-1} 作用下不变，所以 f^{-1} 与 f 有相同的基集.

取整数 n，使 n 是谱分解定理中所有 $n_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 的倍数. 令微分同胚 $g=f^n$，则

$$g|X_{j,i}:X_{j,i}\to X_{j,i}(1\leqslant j\leqslant n_i,\ 1\leqslant i\leqslant s)$$

都是拓扑混合的.

定义 设 Ω_i 是微分同胚 $f:M\to M$ 的基集，称集合

$$W^s(\Omega_i) = \{x \in M \mid d(f^n(x), \Omega_i) \to 0,\ 当\ n \to +\infty\}$$

与

$$W^u(\Omega_i) = \{x \in M \mid d(f^{-n}(x), \Omega_i) \to 0,\ 当\ n \to +\infty\}$$

为 Ω_i 的**稳定集**与**不稳定集**.

命题 6.8 M是紧 Rieman 流形，微分同胚 $f: M \to M$ 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 有基集分解:

$$\Omega(f) = \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j,$$

则

$$M = \bigcup_{j=1}^{s} W^s(\Omega_j),\ M = \bigcup_{j=1}^{s} W^u(\Omega_j),$$

且等式右端并中各集合互不相交.

证明 因为 f 在M上一致连续，所以可以取 Ω_j 的开邻域 $U_j(j = 1, \cdots, s)$，使当 $i \neq j$ 时，

$$U_i \cap U_j = \varnothing\ 且\ f(U_i) \cap U_j = \varnothing.$$

考虑 $\forall x \in M$，因 f 的极限点集 $L(f) \subset \Omega(f)$，所以，

$$d(f^n(x), \Omega(f)) \to 0,\ 当\ n \to +\infty.$$

于是 $\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n \geqslant N$ 时

$$f^n(x) \in \bigcup_{j=1}^{s} U_j.$$

由于 $i \neq j$ 时，

$$f(U_i) \cap U_j = \varnothing,$$

所以 $\exists j_0$，$1 \leqslant j_0 \leqslant s$，使当 $n \geqslant N$ 时，$f^n(x) \in U_{j_0}$. 于是 $x \in W^s(\Omega_{j_0})$，即有

$$M = \bigcup_{j=1}^{s} W^s(\Omega_j).$$

因 $\Omega_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 是互不相交闭集，所以右端并中各集合互不相交，同理可得另一等式. ▮

第七章 伪轨、跟踪与 Markov 分割

本章引入 α-伪轨与 β-跟踪的概念．它们与局部乘积结构一样也是我们研究双曲集性质时常用的工具．§1 中我们用它们证明 Anosov 封闭引理、叶层结构定理与公理A微分同胚 Ω 集的基本邻域定理等；§2 中证明公理A微分同胚的基集 Ω_t 有 Markov 分割；§3 中通过 Markov 分割建立起序列空间 Σ_A 到公理A微分同胚的基集 Ω_s 的对应．

§ 7.1 α-伪轨、β-跟踪

本节中 M 表示紧 Riemann 流形，$f: M \to M$ 是微分同胚．

定义 称 M 中一点列 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$（允许 $a = -\infty$，$b = +\infty$）是 f 的 α-**伪轨**，如果

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha \quad (a \leqslant i \leqslant b-1).$$

称 M 中一点 x，β-**跟踪** α-伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$，如果，

$$d(f^i(x), x_i) < \beta \quad (a \leqslant i \leqslant b).$$

显然，α-伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ 可能不是任何一个点在 f 作用下的一段轨道，因为其中任意一个点可以不是它的前一点的像点，只是要求两者之间距离小于 α． 如果点 $x \in M$ 的一段轨道 $\{f^i(x)\}_{i=a}^{b}$ 跟踪着伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$，且 $f^i(x)$ 对 $x_i (i = a, \cdots, b)$ 的跟踪距离小于 β，就说 x 点 β-跟踪 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$．

定理 7.1 设 f 的紧双曲不变集 Λ 有局部乘积结构，则对 $\forall \beta > 0$，$\exists \alpha > 0$，使得 Λ 中的任一 α-伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ 都被 Λ 中一点 x 所 β-跟踪．

证明 （1）对于任意给定的 $\beta > 0$，我们来选取一个正数 α，

因为Λ有局部乘积结构，β是给定正数，所以存在 $\varepsilon>0$，$\varepsilon\ll 1$，$\delta\in(0,\varepsilon)$，使得 $\forall x,y\in\Lambda$，只要 $d(x,y)<\delta$，就有唯一一点

$$[x,y]\equiv W_\varepsilon^s(x)\cap W_\varepsilon^u(y)\in\Lambda,$$

并且

$$\frac{\varepsilon}{1-\lambda}+\delta<\beta,$$

其中 $\lambda\in(0,1)$ 是定理 6.3 的推论 1 中的 λ。

显然，对 $\forall z\in\Lambda$，有关系式：

$$[z,W_{\lambda\delta}^s(z)\cap\Lambda]=W_{\lambda\delta}^s(z)\cap\Lambda$$

与

$$W_{\lambda\delta}^s(z)\cap\Lambda\subset W_\delta^s(z)\cap\Lambda.$$

由稳定流形族的连续性与[·,·]的连续性，$\exists\alpha>0$，使得只要 $z,y\in\Lambda$，$d(z,y)<\alpha$，就有包含关系式：

$$[z,W_{\lambda\delta}^s(y)\cap\Lambda]\subset W_\delta^s(z)\cap\Lambda. \qquad (*)$$

我们就选取如上的正数 α。

(2) 对(1)中选出的正数 α，考虑任意一个如下形式的 α-伪轨：

$$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset\Lambda.$$

我们先来取一串与它相应的点 $\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$。令 $y_0=x_0$，然后归纳地定义 y_k，令

$$y_k=[x_k,f(y_{k-1})],\quad k=1,\cdots,n.$$

下面验证 y_k 有意义，且

$$y_k\in W_\delta^s(x_k)\cap\Lambda,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

$k=0$ 时显然结论成立。由归纳假设 $y_{k-1}\in W_\delta^s(x_{k-1})\cap\Lambda$，应用定理 6.3 的推论 1 得知

$$f(y_{k-1})\in W_{\lambda\delta}^s(f(x_{k-1}))\cap\Lambda.$$

注意 $d(x_k,f(x_{k-1}))<\alpha$，由(1)中(*)式就得到 $y_k\in W_\delta^s(x_k)\cap\Lambda$。所以，$k=0,\cdots,n$ 时结论成立。于是有 $y_k\in\Lambda$，

$$d(y_k, x_k) < \delta, \quad k = 0, \cdots, m.$$

另一方面，对 $k = 1, \cdots, n$，由 $y_k = [x_k, f(y_{k-1})]$ 得知

$$y_k \in W^u_\varepsilon(f(y_{k-1})),$$

从而对 $j = 1, \cdots, k$，$f^{-j}(y_k) \in W^u_{\theta_j}(y_{k-j})$，其中

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda^i \varepsilon.$$

因为 $\theta_j < \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}$，所以

$$f^{-j}(y_k) \in W^u_{\frac{\varepsilon}{1-\lambda}}(y_{k-j}), \quad j = 1, \cdots, k.$$

取点 $y = f^{-n}(y_n) \in \Lambda$，于是

$$f^i(y) = f^{-(n-i)}(y_n) \in W^u_{\frac{\varepsilon}{1-\lambda}}(y_i)$$

对 $i = 0, 1, \cdots, n$ 成立。从而对 $i = 0, 1, \cdots, n$，

$$d(f^i(y), x_i) \leqslant d(f^i(y), y_i) + d(y_i, x_i)$$

$$< \frac{\varepsilon}{1-\lambda} + \delta < \beta,$$

即点 y，β-跟踪 α-伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^n$。

(3) 对 Λ 中形如 $\{x_i\}_{i=a}^b$ 的 α-伪轨，考虑 α-伪轨 $\{y_i\}_{i=0}^{b-a}$，其中 $y_i = x_{i+a}$，(2)中已证，有点 $y \in \Lambda$，β-跟踪 $\{y_i\}_{i=0}^{b-a}$，显然 $x = f^{-a}(y) \in \Lambda$ 就 β-跟踪 α-伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^b$。

对于无穷伪轨，先取 $\beta' \in (0, \beta)$，对 β'，$\exists \alpha > 0$，使得任一 Λ 中的有限 α-伪轨可以被 Λ 中的点所 β'-跟踪。设 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 是一无穷 α-伪轨，于是对 $\forall m \in \boldsymbol{Z}^+$，$\{x_i\}_{i=-m}^{m}$ 是 α-伪轨，从而可由点 $y_m \in \Lambda$ 所 β'-跟踪。不难看出点集 $\{y_m\} \in \Lambda$ 的任一极限点 $y \in \Lambda$ 都 β-跟踪 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$。

对于其它形式的无穷伪轨 $\{x_i\}_a^\infty$ 或 $\{x_i\}_{-\infty}^b$，同理可证得。∎

为了扩大被跟踪的伪轨的范围，并且给出跟踪无穷伪轨的点的唯一性条件，我们首先介绍可扩映射。

定义 设 f 是 Riemann 流形 M 上的同胚，称 f 关于集合 A

在M上是**可扩的**,如果存在 $\varepsilon>0$,当 $x\in A$, $y\in M$, $x\neq y$ 时,存在 $k\in \boldsymbol{Z}$, 使

$$d(f^k(x),f^k(y))\geqslant\varepsilon.$$

称常数ε为f关于A的**可扩常数**.

命题 7.2 若Λ是微分同胚f的紧双曲集,则f关于Λ在M上是可扩的。

证明 若不然,即对任意小的 $\varepsilon>0$,存在 $x\in\Lambda$, $y\in M$, $x\neq y$ 使

$$d(f^k(x),f^k(y))<\varepsilon$$

对 $\forall k\in\boldsymbol{Z}$ 成立. 从而 $y\in W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(x)$. 由命题 6.4,$[\cdot,\cdot]$有唯一性,所以 $y=[x,x]=x$. 这与假设矛盾. ∎

定理 7.3 设f的紧双曲不变集Λ有局部乘积结构,则对$\forall\beta>0$, $\exists\alpha>0$ 及Λ的开邻域U_Λ,使U_Λ中任一无穷α-伪轨$\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$被$\Lambda$中一点$x$所$\beta$-跟踪. 如果$\varepsilon$为$f$关于$\Lambda$的可扩常数,$\beta<\frac{\varepsilon}{2}$,则$\beta$-跟踪伪轨 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 的点x是唯一的.

证明 由定理 7.1, 对 $\frac{\beta}{2}$,存在 $\alpha_1\in\left(0,\frac{\beta}{2}\right)$,使$\Lambda$中任一$\alpha_1$-伪轨可以被$\Lambda$中一个点所 $\frac{\beta}{2}$-跟踪. 对于 $\frac{\alpha_1}{3}>0$,由f在紧流形M上的一致连续性,存在 $\sigma\in\left(0,\frac{\alpha_1}{3}\right)$,使当 $x,\bar{x}\in M$, $d(x,\bar{x})<\sigma$ 时,

$$d(f(x),f(\bar{x}))<\frac{\alpha_1}{3}.$$

我们取Λ的开邻域

$$U_\Lambda=\{x\in M\,|\,d(x,\Lambda)<\sigma\},$$

于是对 $\forall x\in U_\Lambda$, $\exists\bar{x}\in\Lambda$ 使

$$d(x,\bar{x})<\sigma<\frac{\alpha_1}{3},\quad d(f(x),f(\bar{x}))<\frac{\alpha_1}{3}.$$

这样一来，U_Λ 中的任一$\frac{\alpha_1}{3}$-伪轨 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 都可按上述对应方法得到 Λ 中一个点列 $\{\bar{x}_i\}_{-\infty}^{\infty}$. 显然此点列 $\{\bar{x}_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 Λ 中的 α_1-伪轨，所以被某一点 $y\in\Lambda$ 所 $\frac{\beta}{2}$-跟踪. 于是

$$d(f^i(y),x_i)\leqslant d(f^i(y),\bar{x}_i)+d(\bar{x}_i,x_i)<\beta,$$

即 U_Λ 中 $\frac{\alpha_1}{3}$-伪轨$\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 被点 $y\in\Lambda$ 所 β-跟踪.

若点 x 也 β-跟踪伪轨 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$，则由 f 的可扩常数 $\varepsilon>2\beta$ 得知 $x=y$，即 $\beta<\frac{\varepsilon}{2}$ 时，β-跟踪无穷伪轨的点是唯一的. ∎

定理 7.1 与 7.3 中的双曲不变集可以是 Anosov 微分同胚 f 作用下的全流形 M，也可以是公理A微分同胚 f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 或基集 Ω_i，因为它们都有局部乘积结构. 事实上，今后也只对这几种集合使用定理 7.1 与 7.3.

在证明 Anosov 封闭引理之前先证明它的一个引理. 这个引理是定理 7.1 与 7.3 的一个推论.

引理 设 f 的紧双曲集 Λ 有局部乘积结构，则对 $\forall\beta>0$，$\beta<\frac{\varepsilon}{2}$ (ε 是 f 对 Λ 的可扩常数)，$\exists\alpha>0$，使得如果 $x\in\Lambda$，对某 $n\in\boldsymbol{Z}^+$，$d(f^n(x),x)<\alpha$，则有点 $x'\in\Lambda$ 满足

$$d(f^k(x),f^k(x'))<\beta,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

且 $f^n(x')=x'$.

证明 对 $\forall i\in\boldsymbol{Z}$，令 $x_i=f^k(x)$，其中 k 满足 $0\leqslant k\leqslant n-1$，$k\equiv i\,(\mathrm{mod}\,n)$，即有 $x_{i+n}=x_i$，对一切 i，则 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 为 Λ 中的 α-伪轨. 由定理 7.1，存在$x'\in\Lambda$，β-跟踪 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$. 因 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 n 周期的，所以 $f^n(x')\in\Lambda$ 也 β-跟踪 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$. 由定理 7.3 中唯一性得 $f^n(x')=x'$. ∎

定理 7.4 (Anosov 封闭引理) 若 f 是 Anosov 微分同胚，则 f 是公理A微分同胚.

证明 比较 Anosov 微分同胚与公理A微分同胚的定义可知，只需证明 f 的周期点集 $P(f)$ 在 $\Omega(f)$ 中稠即可。

对于正数 β，$\beta<\frac{\varepsilon}{2}$（$\varepsilon$是 f 关于M的可扩常数），按引理选取 $\alpha<\beta$。设 $y\in\Omega(f)$，考虑点 y 的 β 邻域中 y 的一个直径$<\alpha$的邻域 U。由非游荡点的定义，存在点 $x\in M$ 与 $n\in \boldsymbol{Z}^+$，使得

$$d(x,y)<\beta,\quad d(f^n(x),x)<\alpha.$$

由引理得一 n 周期点 x'，使

$$d(x,x')<\beta.$$

于是，周期点 x' 使

$$d(x',y)\leqslant d(x',x)+d(x,y)<2\beta.$$

因 β 任意小，定理得证. ▮

定理 7.5（叶层结构） 设 Ω_i 为公理A微分同胚 f 的基集，则 $W^s(\Omega_i)$，$W^u(\Omega_i)$ 有叶层分解，即

$$W^s(\Omega_i)=\bigcup_{x\in\Omega_i}W^s(x),\quad W^u(\Omega_i)=\bigcup_{x\in\Omega_i}W^u(x).$$

证明 我们来证前一式，显然只需证

$$W^s(\Omega_i)\subset\bigcup_{x\in\Omega_i}W^s(x).$$

考虑 $\forall y\in W^s(\Omega_i)$，即 $f^n(y)\to\Omega_i$，当 $n\to+\infty$，于是 $\exists N\in \boldsymbol{Z}^+$，使 $\{f^n(y)\}_N^{+\infty}\subset U_{\Omega_i}$，其中 U_{Ω_i} 是 Ω_i 的开邻域，满足定理 7.3 的条件。

将正半轨道 $\{f^n(y)\}_N^{+\infty}$ 看作是半无穷 α-伪轨（α 是任意正数）。由定理 7.3 知，存在 $x\in\Omega_i$，x 点 β-跟踪 $\{f^n(y)\}_N^{+\infty}$。所以 $f^N(y)\in W^s_\beta(f^N(x))$，从而 $f^N(y)\in W^s(f^N(x))$，于是 $y\in W^s(x)$，前一等式得证。

同理可得另一等式. ▮

为方便起见，我们对常数 $\varepsilon,\beta,\alpha,\gamma$ 作下列约定：

(1) 常数 ε 小于 f 关于集合 Ω 的可扩常数；

(2) $\beta \ll \varepsilon$;

(3) $\alpha < \beta$，对于Ω中任一 α-伪轨，$\exists x \in \Omega$，x 点 β-跟踪此 α-伪轨；

(4) $\gamma < \frac{\alpha}{2}$，使得当 $x, y \in M$，$d(x,y) < \gamma$ 时，

$$d(f(x),\ f(y)) < \frac{\alpha}{2}.$$

定理 7.6（基本邻域定理） 若 f 是公理A微分同胚，则存在 $\Omega(f)$ 的邻域 U，使得

$$\bigcap_{n \in Z} f^n(U) = \Omega(f).$$

证明 若 $\Omega(f) \subset U$，则对 $\forall n \in \boldsymbol{Z}$，

$$\Omega(f) = f^n(\Omega(f)) \subset f^n(U),$$

所以

$$\bigcap_{n \in Z} f^n(U) \supset \Omega(f).$$

为证反的包含关系，我们取

$$U = \{y \in M \mid d(y, \Omega) < \gamma\}.$$

设点 $y \in \bigcap_{n \in Z} f^n(U)$. 显然对 $\forall i \in \boldsymbol{Z}$,

$$f^i(y) \in \bigcap_{n \in Z} f^n(U) \subset U.$$

对任一 $i \in \boldsymbol{Z}$，取 $x_i \in \Omega$，使

$$d(f^i(y), x_i) < \gamma,$$

从而 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty} \subset \Omega$ 是 α-伪轨. 这是因为

$$\begin{aligned} d(f(x_i), x_{i+1}) &\leqslant d(f(x_i), f^{i+1}(y)) + d(f^{i+1}(y), x_{i+1}) \\ &< \frac{\alpha}{2} + \gamma < \alpha. \end{aligned}$$

于是 $\exists x \in \Omega$，β-跟踪 $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$. 由此得到，对 $\forall i \in \boldsymbol{Z}$，

$$d(f^i(y), f^i(x)) \leqslant d(f^i(y), x_i) + d(x_i, f^i(x))$$

$$< \gamma + \beta < \varepsilon.$$

因为 $y \in U$，$x \in \Omega$，而 f 关于 Ω 的可扩常数 $> \varepsilon$，所以 $x = y$，由此得知 $y \in \Omega$，即有反的包含关系：

$$\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U) \subset \Omega(f). \blacksquare$$

注 1：显然可以将定理中的 $\Omega(f)$ 换成 f 的任一基集 Ω_i。

注 2：由定理证明可见，凡 $y \bar{\in} \Omega$，则 $\exists k \in \mathbf{Z}$，使

$$d(f^k(y), \Omega) \geqslant \gamma,$$

即 $y \bar{\in} \Omega$，则其轨道上至少有一点与 Ω 的距离大于 γ。我们也将此性质看作是 f 关于 Ω"整体的"可扩性。

对于公理 A 微分同胚 f 的基集 Ω_j，记

$$W_\varepsilon^s(\Omega_j) \equiv \bigcup_{x \in \Omega_j} W_\varepsilon^s(x), \quad W_\varepsilon^u(\Omega_j) \equiv \bigcup_{x \in \Omega_j} W_\varepsilon^u(x).$$

定理 7.7 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 基集 Ω_j 的邻域 U_j，使

$$\bigcap_{k \geqslant 0} f^{-k}(U_j) \subset W_\varepsilon^s(\Omega_j), \quad \bigcap_{k \geqslant 0} f^k(U_j) \subset W_\varepsilon^u(\Omega_j).$$

证明 方法与定理 7.6 的证明类似。

取 Ω_j 的邻域

$$U_j = \{y \in M \mid d(y, \Omega_j) < \gamma\}.$$

若 $y \in \bigcap_{k \geqslant 0} f^{-k}(U_j)$，则对 $\forall i \geqslant 0$，$f^i(y) \in U_j$，于是 $\exists x_i \in \Omega_j$，使 $d(f^i(y), x_i) < \gamma$，从而 $\{x_i\}_0^{+\infty}$ 是 Ω_j 中的 α-伪轨。因此，存在 $x \in \Omega_j$，β-跟踪 $\{x_i\}_0^{+\infty}$。

注意对 $\forall i \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} d(f^i(y), f^i(x)) &\leqslant d(f^i(y), x_i) + d(x_i, f^i(x)) \\ &< \gamma + \beta < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $y \in W_\varepsilon^s(x)$。即有

$$\bigcap_{k \geqslant 0} f^{-k}(U_j) \subset \bigcup_{x \in \Omega_j} W_\varepsilon^s(x).$$

另一关系式可以类似地得到。$\blacksquare$

注：由定理 7.7 的两个关系式立刻得到：

$$\bigcap_{k\in Z} f^k(U_i)\subset W^s_\varepsilon(\Omega_i)\cap W^u_\varepsilon(\Omega_i).$$

若 $y\in W^s_\varepsilon(\Omega_i)\cap W^u_\varepsilon(\Omega_i)$，则

$$y\in W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(z),\quad x,z\in\Omega_i.$$

于是 $y=[x,z]$。因为 Ω_i 有局部乘积结构，对充分小的 ε，$y\in\Omega_i$，所以

$$\bigcap_{k\in Z} f^k(U_i)\subset\Omega_i.$$

立刻得到定理 7.6 的结果。

§7.2 Markov 分割

Markov 分割是将基集 Ω_i 分割为有限个内部不相交的“矩形”。这些矩形在 f 的作用下，“不稳定流形方向”被“拉长”，长到覆盖住它的像所在的矩形的相应方向；而“稳定流形方向”被“压缩”，缩到被它的像所在的矩形的相应方向所覆盖。本节中给出 Markov 分割的定义；证明公理 A 微分同胚的基集 Ω_i 可以作 Markov 分割.

定义 称集合 $R\subset\Omega_i$ 为一**矩形**，如果它的直径很小，又当 $x,y\in R$ 时有 $[x,y]\in R$.

称矩形 R 为**正规的**，如果 R 是闭的，并且，$R=\overline{\mathrm{int}R}$（$\mathrm{int}R$ 是指 R 作为 Ω_i 的子集的内部）.

以下对 $\forall x\in R$，采用符号：

$$W^s(x,R)\equiv W^s_\varepsilon(x)\cap R,\quad W^u(x,R)\equiv W^u_\varepsilon(x)\cap R,$$

其中 ε 很小(例如，小于 f 关于 Ω_i 的可扩常数)，而 R 的直径又 $\ll\varepsilon$.

引理 1 若 R 为矩形，则 $\mathrm{int}R$，$\bar{R}$ 也都是矩形.

证明 设 $x,y\in\mathrm{int}R$，令 $z=[x,y]$，由矩形定义 $z\in R$，需

要证明 $z\in\operatorname{int}R$. 为此考虑充分接近 z 的 $z'\in\Omega_j$,注意

$$[z,x]=x\in\operatorname{int}R,\quad [y,z]=y\in\operatorname{int}R.$$

由 $[\cdot,\cdot]$ 的连续性与 Ω_j 有局部乘积结构，当 $z'\in\Omega_j$ 充分接近 z 时就有

$$[z',x],[y,z']\in R.$$

于是

$$z'=[[z',x],[y,z']]\in R.$$

即 $z\in\operatorname{int}R$. 所以 int R 是矩形. 不难由$[\cdot,\cdot]$的连续性得知 $\bar{R}$ 也是矩形. ▌

引理 2 设 R 是一矩形,则对 $\forall x\in R$, 有

(1) $R=[W^u(x,R),\ W^s(x,R)]$;

(2) $\operatorname{int}R=[\operatorname{int}W^u(x,R),\ \operatorname{int}W^s(x,R)]$;

(3) $\partial R=[\partial W^u(x,R),\ W^s(x,\bar{R})]\cup[W^u(x,\bar{R}),\ \partial W^s(x,R)]$. 其中 ∂R 是 R 作为 Ω_j 的子集的边界; $W^u(x,R),W^s(x,R)$ 的内部或边界分别指它们作为 $W^u_\varepsilon(x)\cap\Omega_j$, $W^s_\varepsilon(x)\cap\Omega_j$ 的子集的内部或边界.

证明 (1) 对于 $x\in R$,因 $W^u(x,R)$, $W^s(x,R)\subset R$, 由矩形定义

$$[W^u(x,R),W^s(x,R)]\subset R.$$

反之,对 $\forall y\in R$, 由矩形定义

$$[y,x]\in W^u(x,R),[x,y]\in W^s(x,R).$$

注意 $y=[[y,x],[x,y]]$, 所以

$$y\in[W^u(x,R),W^s(x,R)].$$

于是

$$R\subset[W^u(x,R),W^s(x,R)].$$

(2) 由命题 6.4 的推论 2,得

$$\operatorname{int}R\supset[\operatorname{int}W^u(x,R),\operatorname{int}W^s(x,R)].$$

为证反的包含关系,考虑任一点 $y\in\operatorname{int}R$, 证明

$$x_1=[y,x]\in\operatorname{int}W^u(x,R),$$

$$x_2 = [x, y] \in \mathrm{int} W^s(x, R)$$

即可。

取点 $x_1' \in W_\varepsilon^u(x_1) \cap \Omega_j$，只要 x_1' 与 x_1 充分接近，由$[\cdot,\cdot]$的连续性，$y_1 \equiv [x_1', x_2]$ 接近 $y = [x_1, x_2]$，于是 $y_1 \in R$。由此得知

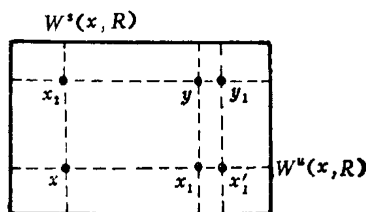


图 7.1

$$x_1' = [x_1', x_1] = [[x_1', x_2], x_1] = [y_1, [y, x]]$$
$$= [y_1, x] \in W_\varepsilon^u(x) \cap R = W^u(x, R),$$

即 $x_1 \in \mathrm{int} W^u(x, R)$。同理可得 $x_2 \in \mathrm{int} W^s(x, R)$。

(3) 因为 $\bar{R}$ 是矩形，由(1)

$$\bar{R} = [W^u(x, \bar{R}), W^s(x, \bar{R})].$$

不难看出，

$$W^u(x, \bar{R}) = \partial W^u(x, R) \cup \mathrm{int} W^u(x, R);$$
$$W^s(x, \bar{R}) = \partial W^s(x, R) \cup \mathrm{int} W^s(x, R).$$

所以

$$\bar{R} = [\partial W^u(x, R) \cup \mathrm{int} W^u(x, R), W^s(x, \bar{R})]$$
$$\cup [W^u(x, \bar{R}), \partial W^s(x, R) \cup \mathrm{int} W^s(x, R)].$$

从而，由(2)得

$$\partial R = \bar{R} \setminus \mathrm{int} R = \bar{R} \setminus [\mathrm{int} W^u(x, R), \mathrm{int} W^s(x, R)]$$
$$= [\partial W^u(x, R), W^s(x, \bar{R})] \cup [W^u(x, \bar{R}), \partial W^s(x, R)]. \blacksquare$$

引理 3 设 R 为闭矩形，则

$$\partial R = \partial^s R \cup \partial^u R,$$

其中

$$\partial^s R = \{x \in R \mid x \bar{\in} \mathrm{int} W^u(x, R)\},$$
$$\partial^u R = \{x \in R \mid x \bar{\in} \mathrm{int} W^s(x, R)\}.$$

证明 设 $x \in R$.

(a) $\partial^s R \cup \partial^u R \subset \partial R$.

设 $x \bar{\in} \partial R$, 即 $x \in \mathrm{int}\ R$,则 $\mathrm{int}\ R$ 是 x 在 Ω_j 中的邻域,从而 $\mathrm{int}\ R \cap W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega_j$ 是 x 在 $W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega_j$ 中的邻域, 即 $x \in \mathrm{int}\ W^u(x, R)$, $x \bar{\in} \partial^s R$. 同理, $x \bar{\in} \partial^u R$. 总之 $x \bar{\in} \partial^s R \cup \partial^u R$.

(b) $\partial R \subset \partial^s R \cup \partial^u R$.

设 $x \bar{\in} \partial^s R \cup \partial^u R$, 即 $x \in \mathrm{int} W^u(x, R)$, 且 $x \in \mathrm{int}\ W^s(x, R)$. 为证 $x \in \mathrm{int}\ R$, 考虑 $y \in \Omega_j$, y 充分接近 x. 首先

$$[x, y] \in W^s_\varepsilon(x) \cap \Omega_j, \quad [y, x] \in W^u_\varepsilon(x) \cap \Omega_j,$$

再注意

$$[x, x] \in \mathrm{int} W^s(x, R), \quad [x, x] \in \mathrm{int} W^u(x, R),$$

由映射$[\cdot, \cdot]$连续,所以只要 y 充分接近 x, 就有

$$[x, y] \in W^s(x, R), \quad [y, x] \in W^u(x, R).$$

从而 $[x, y], [y, x] \in R$. 于是由 R 是矩形得知

$$y = [[y, x], [x, y]] \in R.$$

总之,若 $y \in \Omega_j$, y 充分接近 x, 就有 $y \in R$. 所以 $x \in \mathrm{int}\ R$, $x \bar{\in} \partial R$. ∎

引理 4 设 R 为闭矩形,则对任意 $x_0 \in R$,有

$$\partial^s R = [\partial W^u(x_0, R), W^s(x_0, R)];$$
$$\partial^u R = [W^u(x_0, R), \partial W^s(x_0, R)].$$

证明 我们证明第一个等式. 先证"$\supset$"关系.

设 $y \in [\partial W^u(x_0, R), W^s(x_0, R)]$, 即

$$y = [u, v], \quad u \in \partial W^u(x_0, R), \quad v \in W^s(x_0, R).$$

于是 $y \in W^u_\varepsilon(v) \cap R$ (见图 7.2).

若 $y \in \mathrm{int} W^u(y, R)$,则任意 $y' \in W^u_\varepsilon(y) \cap \Omega_j$, 只要 y' 在 y 附近就也有 $y' \in W^u(y, R)$.

考虑 u 附近的 $u' \in W^u_\varepsilon(x_0) \cap \Omega_j$. 显然

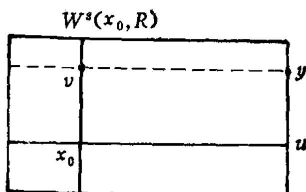


图 7.2

$$y' = [u',v] \in W^u_\varepsilon(y) \cap \Omega_j.$$

y' 在点 $y = [u,v]$ 的附近。所以，$y' \in W^u(y,R)$。

由此，

$$u' = [u',x_0] = [[u',v],x_0] = [y',x_0]$$
$$\in W^u_\varepsilon(x_0) \cap R = W^u(x_0,R).$$

即 $u \in \text{int}W^u(x_0, R)$. 这与 $u \in \partial W^u(x_0, R)$ 矛盾. 所以 $y \bar{\in} \text{int}W^u(y,R)$，$y \in \partial^s R$。"$\supset$" 成立.

再证"$\subset$"关系. 若 $y \in \partial^s R$,即 $y \in R$，$y \bar{\in} \text{int}W^u(y,R)$. 令

$$v = [x_0,y] \in W^s(x_0,R), \quad u = [y,x_0] \in W^u(x_0,R).$$

如果 $u \in \text{int}W^u(x_0,R)$,则任意 $u' \in W^u_\varepsilon(x_0) \cap \Omega_j$，只要 u' 充分接近 u，就有 $u' \in W^u(x_0,R)$.

对于一切充分接近 y 的 $y' \in W^u_\varepsilon(y) \cap \Omega_j$,点

$$[y',x_0] \in W^u_\varepsilon(x_0) \cap \Omega_j,$$

且在点 $u = [y,x_0]$ 附近，所以点 $[y',x_0] \in W^u(x_0,R)$. 由此得知

$$y' = [y',y] = [[y',x_0],y] \in W^u_\varepsilon(y) \cap R = W^u(y,R),$$

即 $y \in \text{int}W^u(y,R)$，这与已设矛盾. 所以 $u \bar{\in} \text{int}W^u(x_0,R)$. 但 $u \in W^u(x_0,R)$，所以 $u \in \partial W^u(x_0,R)$.

总之,若 $y \in \partial^s R$ 则

$$y = [u,v], \quad u \in \partial W^u(x_0,R), \quad v \in W^s(x_0,R).$$

即"$\subset$"关系成立. ▌

定义 基集Ω的 Markov **分割**是Ω的一个由有限个正规矩

形组成的覆盖 $\mathscr{R}=\{R_1,\cdots,R_m\}$，满足以下两个条件

(1) 当 $i\neq j$ 时，$\operatorname{int}R_i\cap\operatorname{int}R_j=\varnothing$；

(2) 当 $x\in\operatorname{int}R_i$，$f(x)\in\operatorname{int}R_j$ 时，有

$$f(W^u(x,R_i))\supset W^u(f(x),R_j),$$
$$f(W^s(x,R_i))\subset W^s(f(x),R_j).$$

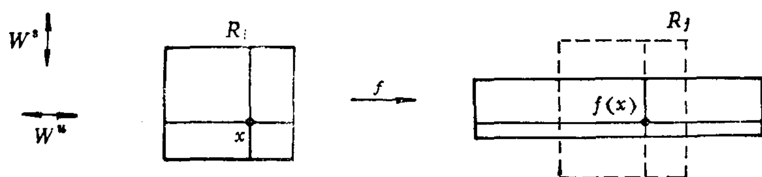


图 7.3

例 前面讨论过 T^2 上的双曲环面自同构 A，它是公理A微分同胚，以 T^2 为基集。

作矩形 R_1 与 R_2 如图 7.4。其中 ξ,η 分别是相应于 A 的特征

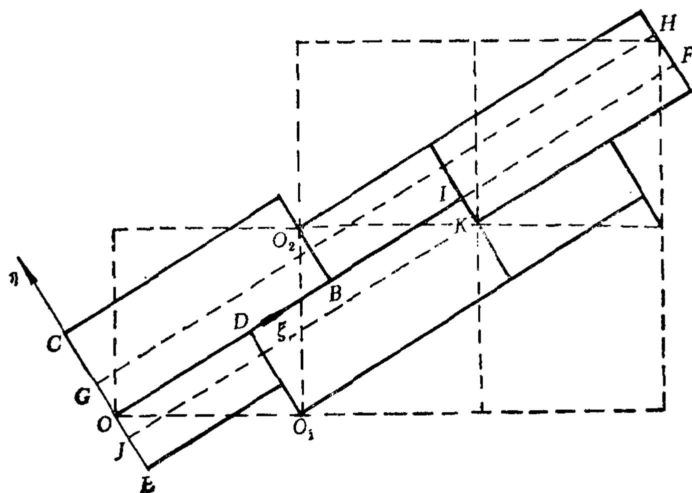


图 7.4

值 $\lambda_1 > 1$，$\lambda_2 \in (0,1)$ 的单位特征向量，$\xi \perp \eta$. $\overline{OB}, \overline{OD}$ 平行于 ξ; $\overline{OC}, \overline{OE}$ 平行于 η.

$$|\overline{OC}| = |\overline{O_1D}|, \quad |\overline{OE}| = |\overline{O_2B}|.$$

不难计算得 $A(R_1)$ 是矩形 $OFGH$,其中

$$|\overline{OF}| = 2|\overline{OB}| + |\overline{OD}|, \quad |\overline{OG}| = |\overline{OC}| - |\overline{OE}|.$$

$A(R_2)$ 是矩形 $OIJK$，其中

$$|\overline{OI}| = |\overline{OB}| + |\overline{OD}|, \ |\overline{OJ}| = 2|\overline{OE}| - |\overline{OC}|.$$

注意到,对 $\forall x \in T^2$,它的不稳定流形 $W^u(x)$ 与稳定流形 $W^s(x)$，当展开 T^2 为 $\boldsymbol{R}^2$ 之后分别是过点 x 平行于 ξ 与 η 的直线. 不难检验，$\mathscr{R} = \{R_1, R_2\}$ 是基集 T^2 的一个 Markov 分割.

定理 7.8 设 Ω 是公理A微分同胚 f 的基集,则 Ω 有直径任意小的 Markov 分割 $\mathscr{R}$ 存在.

证明 证明是构造性的，分三个大步骤进行. 证明中一些相对独立的性质作为命题,放在定理的证明之后来检验.

首先,先作出 Ω 的一个矩形覆盖 $\{T_s\}$.

常数 $\varepsilon, \beta, \alpha, \gamma$ 如定理 7.6 之前所述.

令 $P = \{p_1, \cdots, p_r\}$ 为紧集 Ω 中的一个有限 γ 稠密网. 考虑一切形如

$$\underline{q} = \{\cdots, q_{-1}, q^*_0, q_1, \cdots\}$$

(其中 $q_i \in P$，对 $\forall i \in \boldsymbol{Z}$) 的元素作成的序列空间 Σ 的一个子集

$$\Sigma(\alpha) = \{\underline{q} \in \Sigma \mid d(f(q_i), q_{i+1}) < \alpha, 对\ \forall i \in \boldsymbol{Z}\}.$$

我们令 $r \times r$ 矩阵 A 的 i 行 j 列元素 A_{ij} 为

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ d(f(p_i), p_j) < \alpha, \\ 0, & 当\ d(f(p_i), p_j) \geqslant \alpha. \end{cases}$$

令集合 $\hat{P} = \{1, 2, \cdots, r\}$. 显然 $\Sigma(\alpha)$ 相当于第二章 §1 例 8 中在 $\hat{P}$ 上以 A 为转移矩阵的序列空间 Σ_A. 因为 Σ_A 是 $\hat{P}$ 上的序列空间的紧子空间,所以 $\Sigma(\alpha)$ 是 Σ 的闭子集.

对 $\forall \underline{q} \in \Sigma(\alpha)$，$\underline{q} = \{q_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 Ω 中的一个 α-伪轨，由定理 7.3,存在唯一一点 $\theta(\underline{q}) \in \Omega$，它 β-跟踪 $\underline{q}$. 如此得到的映射 θ:

$\Sigma(\alpha)\to\Omega$ 是满映的、连续的，但是不单(命题 (i))。

如果 $\underline{q},\underline{q}'\in\Sigma(\alpha)$，有关系 $q_0=q_0'$，则令 $\underline{q},\underline{q}'$ 对应到 $\underline{q}^*\in\Sigma(\alpha)$，

$$q_j^*=\begin{cases}q_j, & 当\ j\geqslant 0,\\ q_j', & 当\ j\leqslant 0.\end{cases}$$

我们将 $\underline{q}^*$ 记作 $[\underline{q},\underline{q}']$，即 $\underline{q}^*=[\underline{q},\underline{q}']$. 如此定义的 $\Sigma(\alpha)$ 中的$[\cdot,\cdot]$与Ω中的$[\cdot,\cdot]$有以下关系：

(1) $\theta([\underline{q},\underline{q}'])=[\theta(\underline{q}),\theta(\underline{q}')]$，

(2) $f(\theta(\underline{q}))=\theta(\sigma(\underline{q}))$，

其中 $(\sigma(\underline{q}))_i=q_{i+1}$，对 $\forall i\in\boldsymbol{Z}$ (命题 (ii)).

令集合

$$T_s=\{\theta(\underline{q})\in\Omega\,|\,\underline{q}\in\Sigma(\alpha),\ q_0=p_s\},\quad s=1,\cdots,r.$$

因为θ是满映的，所以 $\{T_s,\ s=1,\cdots,r\}$ 是Ω的一个覆盖. 不难验证(命题 (iii)) T_s 是闭矩形，并且满足 Markov 分割定义中所要求的条件(2). 因为θ不单，所以显然得不到 $\{T_s\}$ 满足定义中的条件(1).

其次，进一步分割 $\{T_s\}$，得到Ω的一个有限个正规矩形组成的覆盖 $\mathscr{R}$.

令 $\mathscr{T}=\{T_1,\cdots,T_r\}$ 是矩形为元素的集合. 对 $\forall x\in\Omega$，考虑$\mathscr{T}$的子集

$$\mathscr{T}(x)=\{T_j\in\mathscr{T}\,|\,x\in T_j\},$$

即所有包含点 x 的矩形作成的集合. 再定义$\mathscr{T}$的另一个子集

$$\mathscr{T}^*(x)=\{T_k\in\mathscr{T}\,|\,T_k\cap T_j\neq\varnothing,\ 对某个\ T_j\in\mathscr{T}(x)\},$$

即所有与 $\mathscr{T}(x)$ 中的矩形相交的矩形的集合. 显然

$$\mathscr{T}^*(x)\supset\mathscr{T}(x).$$

定义Ω的子集 $\boldsymbol{Z}^*$ 如下，

$$\boldsymbol{Z}^*=\{x\in\Omega\,|\,W_\varepsilon^s(x)\cap\partial^s T_k=\varnothing,\ W_\varepsilon^u(x)\cap\partial^u T_k=\varnothing,\ 对一切\ T_k\in\mathscr{T}^*(x)\},$$

即 $\boldsymbol{Z}^*$ 中的点，其 ε 稳定(不稳定)流形与一切 $\mathscr{T}^*(x)$ 中的矩形

T_k 的边界 $\partial^s T_k(\partial^u T_k)$ 不交. 用类似于引理 3 的证明方法可以证明 $\boldsymbol{Z}^*$ 是 Ω 中的开稠集.

我们来进一步分割 T_s. 若 $T_j \cap T_k \neq \varnothing$,则按 T_k 将 T_j 分割为以下四个子集(见图 7.5).

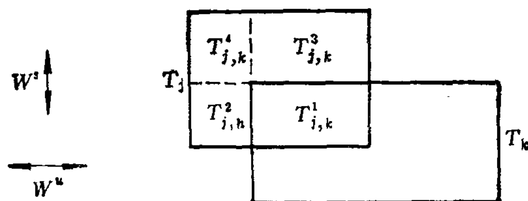


图 7.5

$$T^1_{j,k} = \{x \in T_j \mid W^s(x,T_j) \cap T_k \neq \varnothing,\ W^u(x,\ T_j) \cap T_k \neq \varnothing\},$$
$$T^2_{j,k} = \{x \in T_j \mid W^s(x,T_j) \cap T_k = \varnothing,\ W^u(x,\ T_j) \cap T_k \neq \varnothing\},$$
$$T^3_{j,k} = \{x \in T_j \mid W^s(x,T_j) \cap T_k \neq \varnothing,\ W^u(x,\ T_j) \cap T_k = \varnothing\},$$
$$T^4_{j,k} = \{x \in T_j \mid W^s(x,T_j) \cap T_k = \varnothing,\ W^u(x,\ T_j) \cap T_k = \varnothing\}.$$

显然它们互不相交,并集是 T_j,其中 $T^1_{j,k} = T_j \cap T_k$. 又不难验证(命题 (iv)) $T^n_{j,k}(n = 1,\cdots,4)$ 是矩形, 且当 $x \in T^n_{j,k}$, $x \in \boldsymbol{Z}^*$ 时必有 $x \in \mathrm{int}T^n_{j,k}$ (由引理 1, $\mathrm{int}T^n_{j,k}$ 也是矩形).

对于点 $x \in \boldsymbol{Z}^*$, 令集合

$$R(x) = \bigcap_{j,k} \{\mathrm{int}T^n_{j,k}, \text{当 } x \in T^n_{j,k}\}.$$

因为矩形之交是矩形,所以 $R(x)$ 是包含着点 x 的开矩形. 并且(命题 (v)),若 $y \in \boldsymbol{Z}^*$, 则

$$R(x) \cap R(y) = \varnothing \text{ 或 } R(x) = R(y).$$

因为 $\{T_s\}$ 是有限个, 所以 $T^n_{j,k}$ 总共也只有有限个, 从而 $R(x), x \in \boldsymbol{Z}^*$,特别是其中互不相同的 $R(x)$ 也只有有限个,设为 m 个. 令

$$\mathscr{R} = \overline{\{R(x),\ x \in \boldsymbol{Z}\}} = \{R_1,\cdots,R_m\}.$$

因为 $R(x)$ 是有限个开矩形 $\mathrm{int}\ T^n_{j,k}$ 之交,所以

$$\overline{R(x)}\backslash R(x)\subset\bigcup\partial T_{jk}^{n}.$$

于是 $\overline{R(x)}\backslash R(x)$ 在Ω中无内点，$\mathrm{int}\,\overline{R(x)}=R(x)$，也就是有

$$\overline{\mathrm{int}\,\overline{R(x)}}=\overline{R(x)}.$$

即 $\overline{R(x)}$ 是正规矩形.

因为 Z^* 在Ω中稠，所以 $\mathscr{R}$ 是Ω的一个由有限个正规矩形组成的覆盖. 正规矩形的直径 $\leqslant 2\beta$ （T_i 的直径由定义可见是$\leqslant 2\beta$ 的）而 β 可以取得任意小.

第三，$\mathscr{R}$ 是Ω的一个 Markov 分割.

因为 $R_i=\overline{R(x_i)}$ $(i=1,\cdots,m)$，$R(x_i)$ 互不相同，由命题(vi)，当 $i\neq j$ 时，

$$\mathrm{int}\,R_i\cap\mathrm{int}R_j=R(x_i)\cap R(x_j)=\varnothing,$$

即$\mathscr{R}$满足 Markov 分割的条件(1). 下面来检验 $\mathscr{R}$ 还满足条件(2). 为此先证明以下结论（命题(vi)）：若 $x,y\in Z^*\cap f^{-1}(Z^*)$，$y\in W_\varepsilon^s(x)$ 且 $R(x)=R(y)$，则有

$$R(f(x))=R(f(y)).$$

显然以上结论也可以叙述如下：若 $x\in Z^*\cap f^{-1}(Z^*)$，则当 $y\in W^s(x,R(x))$，且 $y\in Z^*\cap f^{-1}(Z^*)$ 时，

$$f(y)\in W^s(f(x),R(f(x))).$$

也就是说，有以下关系式:

$$f(W^s(x,R(x))\cap Z^*\cap f^{-1}(Z^*))\subset W^s(f(x),R(f(x))). \qquad (*)$$

将以上(*)关系式与 Markov 分割的条件(2)中的第二式相比较，余下的工作是取消(*)关系式中关于点属于 $Z^*\cap f^{-1}(Z^*)$ 的限制，并且改矩形 $R(x),R(f(x))$ 为正规矩形 R_i,R_j.

由 Z^* 的定义，集合 $W^s(x,R(x))\cap Z^*\cap f^{-1}(Z^*)$ 是集合 $W^s(x,\overline{R(x)})$ 中的开稠集(都作为 $W_\varepsilon^s(x)\cap\Omega$ 的子集). 于是由(*)式与 f 的连续性得到:

$$f(W^s(x,\overline{R(x)}))\subset W^s(f(x),\overline{R(f(x))}). \qquad (**)$$

设 $\text{int}\ R_i \cap f^{-1}(\text{int}\ R_j) \neq \varnothing$，由 $\text{int}\ R_i \cap f^{-1}(\text{int}\ R_j)$ 是开集，所以存在 $x \in \boldsymbol{Z}^* \cap f^{-1}(\boldsymbol{Z}^*)$ (Ω 中的开稠集)，

$$x \in \text{int}\ R_i \cap f^{-1}(\text{int}\ R_j).$$

于是 $x \in \text{int}\ R_i, f(x) \in \text{int}\ R_j$，就有

$$\overline{R(x)} = R_i, \quad \overline{R(f(x))} = R_j.$$

对任一点 $x' \in R_i \cap f^{-1}(R_j)$，显然有

$$W^s(x', R_i) = \{[x', y], y \in W^s(x, R_i)\}.$$

于是

$$f(W^s(x', R_i)) = \{[f(x'), f(y)],\ y \in W^s(x, R_i)\}.$$

应用(**)式得到

$$f(W^s(x', R_i)) \subset \{[f(x'), z], z \in W^s(f(x), R_j)\}$$
$$= W^s(f(x'), R_j).$$

所以 Markov 分割定义中条件(2)的第二式成立。

可以类似地证明第一式成立。所以$\mathscr{R}$是 Markov 分割. ▮

命题(i) 映射 $\theta: \Sigma(\alpha) \to \Omega$ 是满映的，连续的但是不单。

证明 对 $\forall x \in \Omega$，考虑 $\{f^i(x)\}_{-\infty}^{\infty} \in \Omega$。因为 P 是 Ω 中的 γ 稠密网，所以对 $\forall i \in \boldsymbol{Z}$，可以找到 $q_i \in P$ 使

$$d(q_i, f^i(x)) < \gamma.$$

由 γ 与 α 的选取方法，$\{q_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 Ω 中一 α-伪轨。 $\underset{\sim}{q} = \{q_i\}_{-\infty}^{\infty} \in \Sigma(\alpha)$. 因为 $\gamma < \beta$，所以 $\theta(\underset{\sim}{q}) = x$，映射 $\theta: \Sigma(\alpha) \to \Omega$ 是满映的。

由于 Ω 中的点并非唯一地被有限 γ 稠密网中的点 γ 接近，所以按以上方法得到的 $\underset{\sim}{q}$ 可能不只有一个，即映射 θ 不单一。

若 θ 在 $\underset{\sim}{q} = \{q_i\}_{-\infty}^{\infty}$ 处不连续，则 $\exists \eta > 0$ 与一串 $\underset{\sim}{q}^N \in \Sigma(\alpha)$，$N = 1, 2, \cdots$，满足 $q_i^N = q_i$，当 $|i| \leqslant N$。但是对 $N = 1, 2, \cdots$，

$$d(\theta(\underset{\sim}{q}^N), \theta(\underset{\sim}{q})) > \eta.$$

我们记 $\theta(\underset{\sim}{q}) = x$，$\theta(\underset{\sim}{q}^N) = x_N$ $(N = 1, 2, \cdots)$，又无妨设 $N \to +\infty$ 时 $x_N \to y$。 由于 $d(x_N, x) > \eta$，所以 $d(y, x) \geqslant \eta$，即 $y \neq x$。

因为 x 点 β-跟踪 $\underline{q}$，x^N 点 β-跟踪 $\underline{q}^N$，于是，对 $\forall N\in \mathbf{Z}^+$，当 $|i|\leqslant N$ 时，

$$d(f^i(x_N),f^i(x))\leqslant d(f^i(x_N),q_i^N)+d(q_i,f^i(x))<2\beta.$$

令 $N\to +\infty$，有

$$d(f^i(y),f^i(x))\leqslant 2\beta<\varepsilon,\quad 对\ \forall i\in \mathbf{Z}.$$

注意其中 ε 是 f 关于 Ω 的可扩常数，这与 $x\neq y$ 矛盾. 所以映射 $\theta:\Sigma(\alpha)\to \Omega$ 连续. ▮

命题 (ii) (1) $\theta([\underline{q},\underline{q}'])=[\theta(\underline{q}),\theta(\underline{q}')]$;

(2) $f(\theta(\underline{q}))=\theta(\sigma(\underline{q}))$，其中 $(\sigma(\underline{q}))_i=q_{i+1}$.

证明 (1) 令 $\underline{q}^*=[\underline{q},\underline{q}']$，因 $\theta(\underline{q}^*)$，$\theta(\underline{q})$，$\theta(\underline{q}')$ 分别 β-跟踪 $\underline{q}^*$，$\underline{q}$，$\underline{q}'$，又 $j\geqslant 0$ 时 $q_j^*=q_j$；$j\leqslant 0$ 时 $q_j^*=q_j'$，所以，当 $j\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}&d(f^j(\theta(\underline{q}^*)),f^j(\theta(\underline{q})))\\&\quad\leqslant d(f^j(\theta(\underline{q}^*)),q_j^*)+d(q_j,f^j(\theta(\underline{q})))<2\beta.\end{aligned}$$

当 $j\leqslant 0$ 时，

$$d(f^j(\theta(\underline{q}^*)),f^j(\theta(\underline{q}')))<2\beta.$$

即有

$$\theta(\underline{q}^*)\in W^s_{2\beta}(\theta(\underline{q}))\cap W^u_{2\beta}(\theta(\underline{q}')).$$

又

$$d(\theta(\underline{q}),\theta(\underline{q}'))\leqslant d(\theta(\underline{q}),q_0)+d(q_0',\theta(\underline{q}'))<2\beta.$$

当 β 充分小时，有唯一性，所以

$$\theta([\underline{q},\underline{q}'])=\theta(\underline{q}^*)=[\theta(\underline{q}),\theta(\underline{q}')].$$

(2) 因为 $\theta(\underline{q})$，β-跟踪 $\underline{q}=\{q_i\}_{-\infty}^{\infty}$，又注意

$$d(f^if(\theta(\underline{q})),(\sigma(\underline{q}))_i)=d(f^{i+1}(\theta(\underline{q})),q_{i+1}),$$

所以 $f(\theta(\underline{q}))$ β-跟踪 $\sigma(\underline{q})$，即

$$f(\theta(\underline{q}))=\theta(\sigma(\underline{q})).\ ▮$$

命题 (iii) T_s 是闭矩形，并且满足 Markov 分割定义中的条件(2).

证明 (1) T_s 是闭矩形。

由 T_s 的定义，T_s 的直径$\leqslant 2\beta$。

取 $x, x' \in T_s$，则存在 $\underline{q}, \underline{q}', q_0 = q_0' = p_s$，使 $x = \theta(\underline{q})$，$x' = \theta(\underline{q}')$。于是由命题 (ii) 得知

$$[x, x'] = [\theta(\underline{q}), \theta(\underline{q}')] = \theta([\underline{q}, \underline{q}']) = \theta(\underline{q}^*).$$

因 $q_0^* = q_0 = p_s$，所以 $\theta(\underline{q}^*) \in T_s$，即 $[x, x'] \in T_s$，T_s 是矩形。

因为集合 $\{\underline{q} \in \Sigma(\alpha) | q_0 = p_s\}$ 是 $\Sigma(\alpha)$ 中的紧、闭子集，T_s 是它在 θ 下的像，θ 连续，所以 T_s 是 Ω 中的闭子集。总之，T_s 是闭矩形。

(2) 若$x \in T_s$，$f(x) \in T_t$，我们来验证

$$f(W^s(x, T_s)) \subset W^s(f(x), T_t)$$

与

$$f(W^u(x, T_s)) \supset W^u(f(x), T_t).$$

因 $f(\theta(\underline{q})) = \theta(\sigma(\underline{q}))$，故若 $\theta(\underline{q}) = x$，则 $f(x) = \theta(\sigma(\underline{q}))$。现有 $x \in T_s$，$f(x) \in T_t$，所以 $\exists \underline{q}$，使

$$\theta(\underline{q}) = x, \quad q_0 = p_s, \quad q_1 = p_t.$$

设 $y \in W^s(x, T_s) = W_\varepsilon^s(x) \cap T_s$。则 $f(y) \in T_t$。这是因为，由 $y \in T_s$ 得

$$y = \theta(\underline{q}'), \quad q_0' = p_s \quad (= q_0).$$

由 $y \in W_\varepsilon^s(x)$ 得

$$y = [x, y] = [\theta(\underline{q}), \theta(\underline{q}')] = \theta([\underline{q}, \underline{q}']),$$

故

$$f(y) = f(\theta[\underline{q}, \underline{q}']) = \theta(\sigma[\underline{q}, \underline{q}']),$$

注意

$$(\sigma[\underline{q}, \underline{q}'])_0 = ([\underline{q}, \underline{q}'])_1 = q_1 = p_t,$$

所以确有 $f(y) \in T_t$。

同时，由 $y \in W_\varepsilon^s(x)$ 得知 $f(y) \in W_\varepsilon^s(f(x))$。合起来，就得到

$$f(y) \in W_\varepsilon^s(f(x)) \cap T_t = W^s(f(x), T_t),$$

即有第一个关系式：

$$f(W^s(x,T_s))\subset W^s(f(x),T_t).$$

对于映射 f^{-1}，在点 $y=f(x)\in T_t$，$f^{-1}(y)\in T_s$ 应用上式，就得到

$$f^{-1}(W^u(y,T_t))\subset W^u(f^{-1}(y),T_s).$$

这就是第二式关系式

$$f(W^u(x,T_s))\supset W^u(f(x),T_t).\ \blacksquare$$

命题(iv) $T^n_{j,k}(n=1,\cdots,4)$ 是矩形，且当 $x\in T^n_{j,k}$，$x\in \boldsymbol{Z}^*$ 时必有 $x\in \mathrm{int}\ T^n_{j,k}$.

证明 首先 $T^n_{j,k}$ 的直径$\leqslant T_j$ 的直径$\leqslant 2\beta$，从而很小。若 $x,y\in T^n_{j,k}$，则 $x,y\in T_j$，$z=[x,y]\in T_j$. 因 $2\beta\ll\varepsilon$，故

$$W^s(z,T_j)=W^s(x,T_j),\quad W^u(z,T_j)=W^u(y,T_j).$$

所以 $z=[x,y]$ 与 x,y 属于同一个 $T^n_{j,k}$，即 $T^n_{j,k}$ 是矩形。

为证后一结论，先注意，由设有 $x\in \mathrm{int}\ T_j$，从而有

$$x\in \mathrm{int}W^s(x,T_j),\quad x\in \mathrm{int}W^u(x,T_j).$$

只需再证，存在 x 在 $W^s(x,T_j)$ 中的邻域 u'，x 在 $W^u(x,T_j)$ 中的邻域 u''，使得 $\forall x'\in u'$，有$W^u(x',T_j)$ 与 $W^u(x,T_j)$ 同时与 T_k 相交或不相交；$\forall x''\in u''$，有 $W^s(x'',T_j)$ 与 $W^s(x,T_j)$ 同时与 T_k 相交或不交（因为由此立刻得知 x 在 Ω 中的邻域 $\mathscr{N}=[u'',u']\subset T^n_{j,k}$，即 $x\in \mathrm{int}T^n_{j,k}$）。

若 $W^u(x,T_j)\cap T_k=\varnothing$，则由于等式左端两集合皆闭，邻域 u' 的存在显然。

若 $W^u(x,T_j)\cap T_k\neq\varnothing$，即 $\exists y\in W^u(x,T_j)$，$y\in T_k$，因为 $x\in \boldsymbol{Z}^*$，所以 $y\in \mathrm{int}W^s(y,T_k)$.

令

$$u'=\{[x,y']\mid y'\in \mathrm{int}W^s(y,T_k)\}\cap \mathrm{int}\ T_j,$$

u' 即满足要求。因为，对 $\forall x'\in u'$，

$$[y,x']=[y,[x,y']]=[y,y']=y'\in \mathrm{int}W^s(y,T_k)\subset T_k.$$

另一方面，由 $y,x'\in T_j$ 知

$$[y,x']=y'\in W^u_\varepsilon(x')\cap T_j=W^u(x',T_j).$$

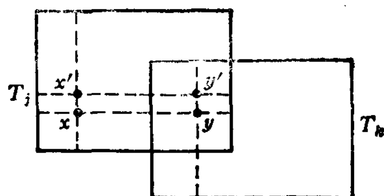


图 7.6

所以 $W^u(x', T_j)\cap T_k\neq\varnothing$. 总之, 对 $\forall x'\in u'$, $W^u(x',T_j)$ 与 $W^u(x,T_j)$ 同时与 T_k 交或不交.

关于 u'' 的结论类似可得. ▌

命题(v) 若 $x,y\in \boldsymbol{Z}^*$, 则 $R(x)\cap R(y)=\varnothing$ 或 $R(x)=R(y)$.

证明 对于 $\forall x\in \boldsymbol{Z}^*$,由命题(iv), $T^n_{j,k}$ 与 $R(x)$ 的构造方法得知对任一 $T^n_{j,k}$, 或者

$$R(x)\subset \operatorname{int} T^n_{j,k}$$

或者
$$R(x)\cap \operatorname{int} T^n_{j,k}=\varnothing.$$

设 $y\in \boldsymbol{Z}^*$, 若 $R(x)\cap R(y)\neq\varnothing$, 而 $R(x)\subset \operatorname{int} T^n_{j,k}$, 则 $R(y)\cap \operatorname{int} T^n_{j,k}\neq\varnothing$. 根据上面的讨论 $R(y)\subset \operatorname{int} T^n_{j,k}$. 所以

$$R(y)\subset R(x).$$

同理得 $R(x)\subset R(y)$. 于是 $R(x)=R(y)$. ▌

命题(vi) 若 $x,y\in \boldsymbol{Z}^*\cap f^{-1}(\boldsymbol{Z}^*)$, $y\in W^s_\varepsilon(x)$ 且 $R(x)=R(y)$,则有

$$R(f(x))=R(f(y)).$$

证明 由假设 $x,y\in \boldsymbol{Z}^*$, $f(x),f(y)\in \boldsymbol{Z}^*$. 因为 $R(x)=R(y)$, 所以无妨设 $x,y\in T_s$, $f(x)\in T_j$. 因此,

$$y\in W^s_\varepsilon(x)\cap T_s=W^s(x,T_s).$$

由命题(iii),

$$f(y)\in f(W^s(x, T_s))\subset W^s(f(x), T_j),$$

所以 $f(y)$ 与 $f(x)$ 同在 T_j 内. 为证命题只需证明 $f(x), f(y)$ 在同一个 $T^u_{j,k}$ 之中.

用反证法. 设 $f(x)$ 与 $f(y)$ 不在同一个 $T^u_{j,k}$ 之中. 由假设可认为:

$$W^u(f(x), T_j)\cap T_k \neq \varnothing;\quad W^u(f(y), T_j)\cap T_k = \varnothing.$$

由第一关系式知,存在点

$$f(z)\in W^u(f(x), T_j)\cap T_k.$$

由命题 (iii)

$$f(z)\in W^u(f(x), T_j)\subset f(W^u(x, T_s)),$$

所以 $z\in W^u(x, T_s)$.

考虑点 $z' = [z, y]\in T_s$, 因为

$$f(z') = [f(z), f(y)]\in T_j,$$

$$f(z')\in W^u_\varepsilon(f(y)),$$

所以

$$f(z')\in W^u(f(y), T_j).$$

另一方面,由 $z'\in W^s(z, T_s)$ 得

$$f(z')\in f(W^s(z, T_s))\subset W^s(f(z), T_k).$$

所以 $f(z')\in T_k$. 总起来,

$$f(z')\in W^u(f(y), T_j)\cap T_k.$$

这与第二关系式矛盾. 所以 $f(x)$ 与 $f(y)$ 在同一个 $T^u_{j,k}$ 之中. ∎

§7.3 基集 Ω_s 的构造

设 $\mathscr{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ 是基集 Ω_s 的一个 Markov 分割. 对此分割定义一个 $m\times m$ 的转移矩阵 $A = A(\mathscr{R})$, 其中元素为

$$A_{ij} = \begin{cases}1, & \text{若 } \operatorname{int}R_i\cap f^{-1}(\operatorname{int}R_j)\neq\varnothing,\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}$$

引理 设 $x\in R_i$, $f(x)\in R_j$, $A_{ij} = 1$, 则

$$f(W^s(x,R_i))\subset W^s(f(x),R_j),$$
$$f(W^u(x,R_i))\supset W^u(f(x),R_j).$$

证明 定理 7.8 的最后已证明了此结论。与 Markov 分割的定义中条件(2)相比较，此结论未要求 $x\in \mathrm{int}R_i$，$f(x)\in \mathrm{int}\, R_j$。▮

命题 7.9 $f(\partial^s\mathscr{R})\subset\partial^s\mathscr{R}$，$f^{-1}(\partial^u\mathscr{R})\subset\partial^u\mathscr{R}$，其中

$$\partial^s\mathscr{R}=\bigcup_{j=1}^{m}\partial^s R_j,\quad \partial^u\mathscr{R}=\bigcup_{j=1}^{m}\partial^u R_j.$$

证明 因为 $\bigcup\limits_{j=1}^{m} f^{-1}(\mathrm{int}R_j)$ 在 Ω_s 中稠，所以

$$\bigcup_{j=1}^{m}(\mathrm{int}R_i\cap f^{-1}(\mathrm{int}R_j))$$

在 R_i 中稠。于是对任意 $x\in R_i$，存在 j，$1\leqslant j\leqslant m$，与 x_n，$n=1,2,\cdots$，使得

$$x_n\in \mathrm{int}\, R_i\cap f^{-1}(\mathrm{int}\, R_j)\quad 且\quad \lim x_n=x.$$

即引理中的条件 $x\in R_i, f(x)\in R_j$ 与 $A_{ij}=1$ 都满足，所以下面的关系式成立

$$f(W^u(x,R_i))\supset W^u(f(x),R_j).$$

如果 $f(x)\notin\partial^s\mathscr{R}$，则 $f(x)\notin\partial^s R_j$，

$$f(x)\in \mathrm{int}W^u(f(x),R_j).$$

由上述关系式得

$$f(x)\in \mathrm{int}f(W^u(x,R_i))=f(\mathrm{int}W^u(x,R_i)),$$

所以 $x\in \mathrm{int}W^u(x,R_i)$，即有 $x\notin\partial^s R_i$。从而 $x\notin\partial^s\mathscr{R}$。这就证明了

$$f(\partial^s\mathscr{R})\subset\partial^s\mathscr{R}.$$

另一关系式可以类似地证明。▮

引理 1 设集合 $D\subset W^s_\delta(x)\cap\Omega_s$，$C\subset W^u_\delta(x)\cap\Omega_s$，则矩形

$$[C,D]=\{[c,d]\mid c\in C,d\in D\}$$

是正规的当且仅当 C,D 是正规的，即 $D=\overline{\mathrm{int}D}$，$C=\overline{\mathrm{int}C}$。其中 $\mathrm{int}\, D,\mathrm{int}\, C$ 是指 D,C 作为 $W^s_\delta(x)\cap\Omega_s, W^u_\delta(x)\cap\Omega_s$ 的子

集的内部.

证明 先来验证

$$\mathrm{int}[C,D]=[\mathrm{int}\,C,\mathrm{int}\,D].$$

设 $[c,d]\in[\mathrm{int}C,\mathrm{int}D]$，即 $c\in\mathrm{int}\,C$，$d\in\mathrm{ind}\,D$，于是存在 $\widetilde{C}$ 与 $\widetilde{D}$ 分别是 c，d 在 C，D 中的邻域，从而 $[\widetilde{C},\widetilde{D}]$ 是 $[c,d]$ 在 $[C,D]$ 中的邻域，即 $[c,d]\in\mathrm{int}\,[C,D]$，所以有

$$[\mathrm{int}C,\mathrm{int}D]\subset\mathrm{int}[C,D].$$

反之，设 $[c,d]\in\mathrm{int}[C,D]$，于是 $[c,d]\in[C,D]$，$c\in C$，$d\in D$。若 $c\notin\mathrm{int}C$，即在 c 的任意邻近有 c'，$c'\in W^u_\delta(x)\cap\Omega_s$，$c'\notin C$。从而在 $[c,d]$ 的任意邻近，有点 $[c',d]\notin[C,D]$，即 $[c,d]\notin\mathrm{int}[C,D]$，矛盾。所以 $c\in\mathrm{int}C$。同理 $d\in\mathrm{int}D$。也就是有

$$\mathrm{int}\;[C,D]\subset[\mathrm{int}\,C,\mathrm{int}D].$$

设 C,D 都正规，于是

$$[C,D]=[\overline{\mathrm{int}C},\overline{\mathrm{int}\,D}]=\overline{[\mathrm{int}C,\mathrm{int}\,D]},$$

其中后一等号成立是因为 $[\cdot,\cdot]$ 是同胚。再由上面验证所得的等式，就有

$$[C,D]=\overline{\mathrm{int}\;[C,D]}.$$

即 $[C,D]$ 正规。

反之，若 $[C,D]$ 正规，则有

$$[C,D]=\overline{\mathrm{int}\,[C,D]}=[\overline{\mathrm{int}C},\overline{\mathrm{int}D}].$$

因为对任意 $\widetilde{C},\widetilde{D}$

$$\widetilde{C}\subset W^u_\delta(x)\cap\Omega_s,\quad \widetilde{D}\subset W^s_\delta(x)\cap\Omega_s$$

有

$$[[\widetilde{C},\widetilde{D}],x]=\widetilde{C},\;[x,[\widetilde{C},\widetilde{D}]]=\widetilde{D}.$$

所以 $C=\overline{\mathrm{int}C}$，$D=\overline{\mathrm{int}D}$。 ▌

定义 设 R,S 是两个矩形，称 S 为 R 的 ***u*-子矩形**，如果

(a) $S\neq\varnothing$，$S\subset R$，S 是正规的；

(b) 当 $y\in S$ 时 $W^u(y,S)=W^u(y,R)$（见图 7.7）。

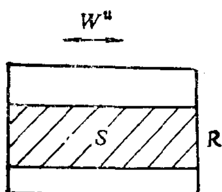


图 7.7

引理 2 设 S 是 R_i 的 u-子矩形，$A_{ij}=1$，则 $f(S)\cap R_j$ 为 R_j 的 u-子矩形。

证明 因 $A_{ij}=1$，故存在 $x\in R_i\cap f^{-1}(R_j)$，即 $x\in R_i, f(x)\in R_j$。令 $D=W^s(x,R_i)\cap S$，因为 S 是 R_i 的 u-子矩形，所以 $D\neq\emptyset$（见图 7.8）。并且对 $\forall x'\in D$，有 $D=W^s(x',S)$。令 $C=W^u(x',S)$，由 §2 的引理 2，$S=[C,D]$。应用引理 1，由 S 正规得 $D=\overline{\mathrm{int}D}$。

显然

$$S=\bigcup_{y\in S}W^u(y,S).$$

注意 S 是 R_i 的 u-子矩形与 $S=[C,D]$，所以有

$$S=\bigcup_{y\in S}W^u(y,R_i)=\bigcup_{y\in D}W^u(y,R_i).$$

从而得到 $f(S)\cap R_j$ 的表示式：

$$f(S)\cap R_j=\bigcup_{y\in D}(f(W^u(y,R_i))\cap R_j).$$

注意 $y\in D$ 时，

$$f(y)\in f(D)\subset f(W^s(x,R_i))\subset W^s(f(x),R_j)\subset R_j,$$

所以

$$f(W^u(y,R_i))\supset W^u(f(y),R_j).$$

于是

$$f(W^u(y,R_i))\cap R_j=W^u(f(y),R_j).$$

将以上关系式代入上面 $f(S)\cap R_i$ 的表示式中，立刻得到 $f(S)\cap R_i$ 的表示式：

$$f(S)\cap R_i = \bigcup_{y\in D} W^u(f(y),R_i) = \bigcup_{y'\in f(D)} W^u(y',R_i). \quad (1)$$

不难检验

$$\bigcup_{y'\in f(D)} W^u(y',R_i) = [W^u(f(x),R_i),f(D)].$$

"$\supset$"是显然的；反过来，取 $y''\in W^u(y',R_i)$，$y'\in f(D)$（见图 7.8）。

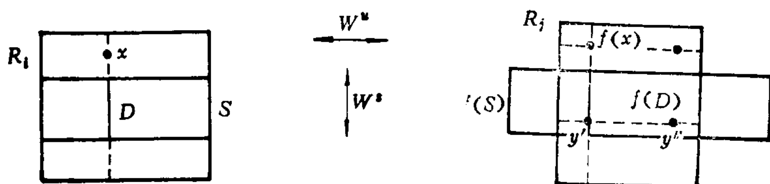


图 7.8

令 $z = [y'',f(x)]$，则

$$y'' = [y'',y'] = [z,y'],$$

而 $z\in W^u(f(x),R_i)$，$y'\in f(D)$，所以

$$y''\in [W^u(f(x),R_i),f(D)].$$

即"$\subset$"也成立。

于是我们得到 $f(S)\cap R_i$ 的表示式：

$$f(S)\cap R_i = [W^u(f(x),R_i),f(D)]. \quad (2)$$

下面应用表示式 (1) 与 (2) 按定义来检验 $f(S)\cap R_i$ 是 R_i 的 u-子矩形。

因为 $f(D)\subset W^s(f(x),R_i)$，$f(D)$ 非空，由(2)，$f(S)\cap R_i$ 是非空矩形。又显然 $f(S)\cap R_i\subset R_i$。因为 $D=\overline{\mathrm{int} D}$，所以

$$f(D) = \overline{\mathrm{int}\, f(D)},$$

即 $f(D)$ 正规。同时，R_i 正规，

$$R_i = [W^u(f(x),R_i),W^s(f(x),R_i)],$$

由引理 1 知 $W^u(f(x),R_i)$ 正规。再应用引理 1，由 (2) 式知 $f(S)\cap R_i$ 正规。总之，定义中条件 (a) 成立。

为检验条件 (b)，取 $y''\in f(S)\cap R_i$，来证

$$W^u(y'',f(S)\cap R_i)=W^u(y'',R_i).$$

显然只需证"$\supset$"。由表示式(1)，存在 $y'\in f(D)$，使 $y''\in W^u(y',R_i)$。于是

$$W^u(y'',R_i)=W^u(y',R_i)\subset f(S)\cap R_i,$$

即

$$W^u(y'',f(S)\cap R_i)\supset W^u(y'',R_i)$$

成立。∎

定义 一个集合称为是**剩余集**，如果它可以表为可数个稠密开集之交集，或它的余集可表为可数个疏闭集的并。

定理 7.10 对于每一个 $\underline{a}=\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}\in\Sigma_A$（矩阵 A 如 §3 开始时所述），集合

$$K(\underline{a})=\bigcap_{j\in Z}f^{-j}(R_{a_j})$$

恰包含 Ω_s 中的一个点，记作 $\pi(\underline{a})$。且映射 $\pi:\Sigma_A\to\Omega_s$ 连续，满映，在 Σ_A 上有关系式

$$\pi\circ\sigma=f\circ\pi,$$

而且限制 π 的像在剩余集

$$Y=\Omega_s\Big\backslash\bigcup_{j\in Z}f^j(\partial^s\mathscr{R}\cup\partial^u\mathscr{R})$$

上是单一的。

证明 对任意 $\underline{a}=\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}\in\Sigma_A$，有

$$A_{a_ja_{j+1}}=1,\quad 对\ \forall j\in Z.$$

取 R_{a_1}，显然它是它自己的 u-子矩形。由引理 2，$f(R_{a_1})\cap R_{a_2}$ 是 R_{a_2} 的 u-子矩形。归纳可得

$$\bigcap_{j=1}^{n}f^{n-j}(R_{a_j})$$

是 R_{a_n} 的 u- 子矩形，从而它非空、正规。

令矩形

$$K_n(\underline{a}) = \bigcap_{i=-n}^{n} f^{-i}(R_{a_i}).$$

显然

$$K_n(\underline{a}) = f^{-n} \bigcap_{i=1}^{2n+1} f^{2n+1-i}(R_{a_{-n-1+i}}).$$

由前面的讨论知 $K_n(\underline{a})$ 是非空、正规矩形。再注意，对 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$，$K_n(\underline{a}) \supset K_{n+1}(\underline{a})$，所以

$$K(\underline{a}) = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} f^{-i}(R_{a_i}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(\underline{a}) \neq \varnothing.$$

如果点 $x, y \in K(\underline{a})$，则对 $\forall i \in \mathbf{Z}$，$f^i(x)$ 与 $f^i(y) \in R_{a_i}$ 而 R_{a_i} 的直径$<2\beta$，由 f 的可扩性，得到 $x = y$。总之，集合 $K(\underline{a})$ 恰包含 Ω_s 中一个点。

记 $K(\underline{a})$ 中的唯一一点为 $\pi(\underline{a})$，得到映射 $\pi: \Sigma_A \to \Omega_s$。以下逐条检验定理中所述 π 之性质。

关系式 $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$ 成立，因为

$$K(\sigma(\underline{a})) = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} f^{-i}(R_{a_{i+1}}) = fK(\underline{a}).$$

π 有连续性. 因为若不然，存在 $\delta > 0$，$\underline{a}, \underline{a}^N \in \Sigma_A$，使得当 $|i| \leqslant N$ 时，$a_i = a_i^N$，而

$$d(\pi(\underline{a}),\ \pi(\underline{a}^N)) > \delta.$$

记 $\pi(\underline{a}) = x$，$\pi(\underline{a}^N) = x_N$。无妨设 $x_N \to y$。于是

$$d(x, y) \geqslant \delta, \quad x \neq y.$$

另一方面，对 $\forall i$，$|i| \leqslant N$，$f^i(x), f^i(x_N) \in R_{a_i}$，即有

$$d(f^i(x), f^i(x_N)) < 2\beta.$$

令 $N \to \infty$ 得到

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leqslant 2\beta, \quad 对\ \forall i \in \mathbf{Z}$$

成立。因 f 关于 Ω_s 可扩，以上两方面结果矛盾。

下面来证，对任一个 $x\in Y$，x 对 π 的原像存在、唯一。固定 x，对 $\forall i\in \mathbb{Z}$，取 a_i 使 $f^i(x)\in R_{a_i}$，因为 $x\in Y$，所以 $f^i(x)\in \mathrm{int}\, R_{a_i}$。于是 $A_{a_i a_{i+1}}=1$，对 $\forall i\in \mathbb{Z}$。所以

$$\underline{a}=\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}\in \Sigma_A,\quad \pi(\underline{a})=x.$$

如果还有 $\underline{b}\in\Sigma_A$ 使 $\pi(\underline{b})=x\in Y$，则对 $\forall i\in \mathbb{Z}, f^i(x)\in \mathrm{int}R_{b_i}$，由 Markov 分割的性质(1)，$a_i=b_i$，即有 $\underline{a}=\underline{b}$。所以限制 π 的像在 Y 上是单一的。由于 $\partial^s\mathscr{R}\cup\partial^u\mathscr{R}$ 是 Ω_s 中疏、闭集，Y 是剩余集。

π 是满映的。这是因为 $Y\subset\pi(\Sigma_A)$，Y 在 Ω_s 中稠，又 π 连续，Σ_A 紧、闭，所以 $\pi(\Sigma_A)=\Omega_s$。∎

注：由证明可见，在集合 $\bigcup\limits_{i\in Z} f^i(\partial^s\mathscr{R}\cup\partial^u\mathscr{R})$上，$\pi$ 的原像可能不唯一。

命题 7.11 若 $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 拓扑混合，则 $f:\Omega_s\to\Omega_s$ 也拓扑混合。

证明 令 U,V 是 Ω_s 中非空开集，因为映射 π 满映、连续，所以 U,V 在 π 下的原像 $\widetilde{U},\widetilde{V}$ 是 Σ_A 中的非空开集。若 $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 拓扑混合，则存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，

$$\sigma^n(\widetilde{U})\cap\widetilde{V}\neq\varnothing.$$

显然

$$\pi(\sigma^n(\widetilde{U})\cap\widetilde{V})\neq\varnothing.$$

因为

$$\pi(\sigma^n(\widetilde{U})\cap\widetilde{V})\subset\pi(\sigma^n(\widetilde{U}))\cap\pi(\widetilde{V}),$$

所以

$$\pi(\sigma^n(\widetilde{U}))\cap\pi(\widetilde{V})\neq\varnothing.$$

不难由在 Σ_A 上 $\pi\circ\sigma=f\circ\pi$ 得

$$\pi\circ\sigma^n=f^n\circ\pi,$$

所以

$$f^n(U)\cap V\neq\varnothing.$$

即 $f:\Omega_s\to\Omega_s$ 是拓扑混合的。∎

第八章　公理 A 微分同胚的 Ω 稳定性

§ 8.1　双曲不变集的局部稳定性

定义　设 Λ 是 f 的不变集，U_Λ 是 Λ 的邻域，称 Λ 在 U_Λ 中**最大**，如果

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U_\Lambda).$$

由定理 7.6，公理A微分同胚 f 的 $\Omega(f)$ 在其集本邻域 U 中最大。

定理 8.1（双曲不变集的局部稳定性）　设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是公理A微分同胚，Λ 是 f 的紧双曲不变集，有局部乘积结构，则存在 Λ 在 M 中的邻域 U_Λ 及 f 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{N}$，使对 $\forall g \in \mathscr{N}$，$g$ 有紧双曲不变集 Λ_g，有局部乘积结构，在 U_Λ 中最大，且存在同胚 $\varphi_g: \Lambda \to \Lambda_g$ 使以下交换图表成立。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \downarrow{\varphi_g} & & \downarrow{\varphi_g} \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g \end{array}$$

证明　类似于在定理 6.2（双曲不变集的局部稳定流形定理）中对微分同胚 f 考虑 Λ 集上有界（连续）截面空间 $C_b(C_0)$ 中的映射

$$\varphi: C_b(\delta) \to C_b \ (C_0(\delta) \to C_0),$$

我们对 f 邻近的 g 考虑连续截面空间 C_0 中的映射

$$H_g: C_0(\delta) \to C_0,$$

对 $\forall \rho \in C_0(\delta)$，规定 $H_g(\rho)$ 对 $\forall x \in \Lambda$，使

$$H_g(\rho)x \equiv \exp_x^{-1} \circ g \circ \exp_{f^{-1}(x)} \rho(f^{-1}(x)).$$

定理 6.2 中已证，H_f 以零截面为双曲不动点，由 g 在 C^1 意义下接近 f 得到 H_g 在 C^1 意义下接近 H_f，所以存在 f 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{N}_1$ 与充分小的常数 $\tau > 0$，$\tau < \beta$ 又 $\tau < \sigma$（常数 $\varepsilon, \beta, \alpha, \sigma$ 有以下关系：$\varepsilon < f$ 关于 Λ 的可扩常数 $< f$ 在 Λ 上局部稳定流形的尺度；$\beta \ll \varepsilon$；而 α 与 σ 使 Λ 的 σ 邻域

$$U_\sigma(\Lambda) \equiv \{x \in M \mid d(x, \Lambda) < \sigma\}$$

中的 α-伪轨可以被 Λ 中的点所 β-跟踪)，使得对 $\forall g \in \mathscr{N}_1$，$H_g$ 有双曲不动点 ρ_g，$\|\rho_g\| < \tau$. 因为 $H_g(\rho_g) = \rho_g$，所以对 $\forall g \in \mathscr{N}_1$，$x \in \Lambda$，有

$$\rho_g(x) = \exp_x^{-1} \circ g \circ \exp_{f^{-1}(x)} \rho_g(f^{-1}(x)).$$

我们定义 Λ 上的映射 $\varphi_g(x) \equiv \exp_x \rho_g(x)$，就得到，对 $\forall g \in \mathscr{N}_1$，$x \in \Lambda$，

$$\varphi_g(x) = g \circ \varphi_g(f^{-1}(x)),$$

即有

$$\varphi_g \circ f = g \circ \varphi_g.$$

由于 $\|\rho_g\| < \tau$，所以对 $\forall x \in \Lambda$，

$$d(\varphi_g(x), x) = |\rho_g(x)| < \tau.$$

我们取 Λ 的邻域 U_Λ 如下：

$$U_\Lambda = \{y \in M \mid d(y, \Lambda) < \tau\} \equiv U_\tau(\Lambda).$$

显然对 $\forall g \in \mathscr{N}_1$，

$$\Lambda_g \equiv \varphi_g(\Lambda) \subset U_\Lambda.$$

因为 $\rho_g \in C_0$，所以 φ_g 是 Λ 上的连续映射. 下面检验 φ_g 是单的. 若有 $x, y \in \Lambda$，使 $\varphi_g(x) = \varphi_g(y)$，则对 $\forall n \in \boldsymbol{Z}$，

$$\varphi_g f^n(x) = g^n \varphi_g(x) = g^n \varphi_g(y) = \varphi_g f^n(y).$$

因为对 $\forall x \in \Lambda$，$d(\varphi_g(x), x) < \tau$，所以对 $\forall n \in \boldsymbol{Z}$，

$$d(f^n(x), f^n(y)) < 2\tau,$$

因 $2\tau <f$ 关于Λ的可扩常数,所以 $x=y$, 即 φ_g 是单的.

因为 φ_g 连续, 单, Λ是紧集, 所以 φ_g 是Λ到其像集 $\Lambda_g\equiv\varphi_g(\Lambda)$ 上的同胚. 显然 Λ_g 是 g 的不变集.

定理 6.2 中由 $\rho=0$ 是映射φ的双曲不动点得到 f 在不变集Λ上有局部稳定流形与局部不稳定流形,类似地, 由 ρ_g 是映射 H_g 的双曲不动点也可得到 g 在不变集 Λ_g 上有局部稳定流形与不稳定流形. 并且,当 $g\in\mathscr{N}_1$ 时, 其局部稳定流形与不稳定流形的尺度一致地 $>2\beta$, 又每一点对此尺度的稳定流形与不稳定流形只交于该点. 进而肯定 Λ_g 是 g 的双曲不变集的严格证明从略(见[5]).

下面证明 Λ_g 有局部乘积结构.

因为 Λ_g 是 g 的紧双曲不变集,由命题 6.4, 对充分小的 $\varepsilon'>0$, $\exists\delta'\in(0,\varepsilon')$,使得,当 $x',y'\in\Lambda_g$, $d(x',y')<\delta'$ 时,

$$W^s_{\varepsilon'}(x')\cap W^u_{\varepsilon'}(y')$$

是M中唯一一点 w. 为证 Λ_g 有局部乘积结构只需证 $w\in\Lambda_g$.

以 x,y 表示 x',y' 在 φ_g 下的原像,即

$$x'=\varphi_g(x),\ y'=\varphi_g(y).$$

因为 φ_g 在Λ上一致连续, Λ有局部乘积结构, 所以对上述 $\varepsilon'>0$, $\exists$ 充分小的 $\varepsilon>0$, 使当 $x,y\in\Lambda$, $d(x,y)<\varepsilon$ 时,

$$d(x',y')<\varepsilon',$$

并且,存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$ 使当 $x,y\in\Lambda$, $d(x,y)<\delta$ 时,

$$[x,y]=W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)=z\in\Lambda.$$

无妨认为,上面提到的 δ' 使得当 $d(x',y')<\delta'$ 时, $d(x,y)<\delta$, 否则再缩小之.

总之,当 $x',y'\in\Lambda_g$, $d(x',y')<\delta'$ 时,有

$$x,y\in\Lambda,\ d(x,y)<\delta.$$

从而

$$z=W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)\in\Lambda,$$

即有

$$d(f^n(z),f^n(x))<\varepsilon,\quad 当\ n\geqslant 0;$$
$$d(f^n(z),f^n(y))<\varepsilon,\quad 当\ n\leqslant 0.$$

于是

$$d(\varphi_g f^n(z),\varphi_g f^n(x))<\varepsilon',\quad 当\ n\geqslant 0;$$
$$d(\varphi_g f^n(z),\varphi_g f^n(y))<\varepsilon',\quad 当\ n\leqslant 0.$$

令 $z'=\varphi_g(z)$，就有

$$d(g^n(z'),g^n(x'))<\varepsilon',\quad 当\ n\geqslant 0;$$
$$d(g^n(z'),g^n(y'))<\varepsilon',\quad 当\ n\leqslant 0.$$

从而有

$$z'\in W^s_{\varepsilon'}(x')\cap W^u_{\varepsilon'}(y').$$

注意 $d(x',y')<\delta'$ 时，$W^s_{\varepsilon'}(x')\cap W^u_{\varepsilon'}(y')$ 是唯一一点 w，所以

$$w=z'=\varphi_g(z)\in\Lambda_g.$$

即 Λ_g 有局部乘积结构．

最后来证 Λ_g 在 U_Λ 中最大．

因为 $\Lambda_g\subset U_\Lambda$，$\Lambda_g$ 是 g 的不变集，所以对 $\forall n\in\mathbf{Z}$，

$$\Lambda_g\subset g^n(U_\Lambda),$$

从而

$$\Lambda_g\subset\bigcap_{n\in Z}g^n(U_\Lambda).$$

取 $\mathscr{N}\subset\mathscr{N}_1$，使得对 $\forall g\in\mathscr{N}$，

$$\sup_{x\in M}d(f(x),g(x))<\alpha.$$

于是，对任意 $y\in\bigcap_{n\in Z}g^n(U_\Lambda)$，有 $\{g^n(y)\}_{-\infty}^{\infty}\subset U_\Lambda$ 是 $U_\Lambda\equiv U_\tau(\Lambda)$ 中 f 的 α-伪轨．因为 $\tau<\sigma$，所以有唯一一点 $x\in\Lambda$，x 点 β-跟踪 $\{g^n(y)\}_{-\infty}^{\infty}$，即对 $\forall n\in\mathbf{Z}$，

$$d(f^n(x),g^n(y))<\beta.$$

另一方面，对 $\forall n\in\mathbf{Z}$，

$$d(f^n(x),g^n(\varphi_g(x)))=d(f^n(x),\varphi_g f^n(x))<\tau,$$

合起来就得到：对 $\forall n\in \boldsymbol{Z}$，

$$d(g^n(y),g^n(\varphi_g(x)))<\beta+\tau<2\beta.$$

因为 $g\in\mathscr{N}$，所以 $g\in\mathscr{N}_1$，从而 g 在 Λ_g 上每一点的 2β 局部稳定流形与不稳定流形只交于该点. 于是，由

$$y\in W^s_{2\beta}(\varphi_g(x))\cap W^u_{2\beta}(\varphi_g(x))$$

得知 $y=\varphi_g(x)$，所以 $y\in\Lambda_g$，即

$$\bigcap_{n\in Z} g^n(U_\Lambda)\subset\Lambda_g.$$

总之，$\Lambda_g=\bigcap\limits_{n\in \boldsymbol{Z}} g^n(U_\Lambda)$，即 Λ_g 在 U_Λ 中最大。▮

§8.2 公理A微分同胚的Ω稳定性

定义 称 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是Ω**稳定的**，如果存在 f 在 Diff^r (M) 中的邻域 $\mathscr{N}$，f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 在 M 中的邻域 U，使当 $g\in\mathscr{N}$ 时，g 的非游荡点集 $\Omega(g)\subset U$，且有同胚 $\varphi_g:\Omega(f)\to\Omega(g)$，使以下关系式成立.

$$\begin{array}{ccc}\Omega(f) & \xrightarrow{f} & \Omega(f)\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g}\\ \Omega(g) & \xrightarrow{g} & \Omega(g)\end{array}$$

显然公理A微分同胚 f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 满足定理 8.1 中的集合 Λ 的一切条件，此时根据定理 8.1 得到的集合 Λ_g 有性质：$\Lambda_g\subset\Omega(g)$，这是因为

$$\Lambda_g=\varphi_g(\Omega(f))=\varphi_g(\overline{P(f)})=\overline{\varphi_g(P(f))}\subset\overline{P(g)}\subset\Omega(g).$$

如果还有关系式：$\Omega(g)\subset U_\Lambda$，则由 $\Omega(g)$ 是 g 的不变集与 Λ_g 在 U_Λ 中最大就得到 $\Omega(g)\subset\Lambda_g$，从而 $\Omega(g)=\Lambda_g$.

但是，一般说来，未必有 $\Omega(g)\subset U_\Lambda$. 下面举一个简单的例

子.

例1 M是二维球面，公理A微分同胚 $f: M \to M$ 如图8.1(a)所示，点A与B是源；C, D是汇；P, Q是鞍点.

$$\Omega(f) = P(f) = \{A, B, C, D, P, Q\}.$$

扰动后的系统g有相应的源 A', B'；汇 C', D'；鞍点 P', Q'（见图8.1(b)）.

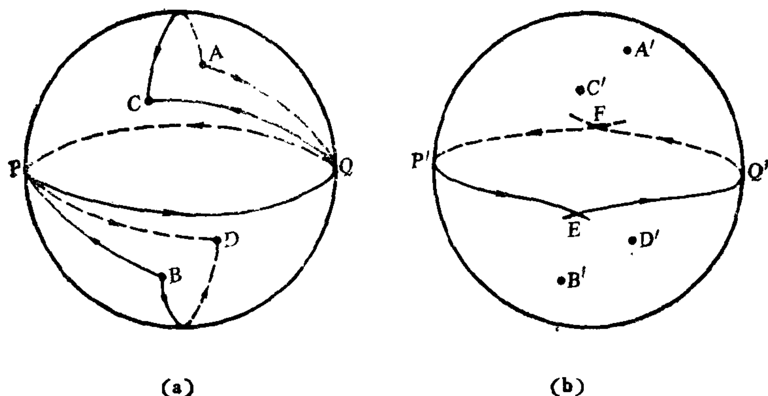


图 8.1

此外，还可能出现 $W^u(P')$ 与 $W^s(Q')$ 横截相交于点E；$W^u(Q')$ 与 $W^s(P')$ 横截相交于点F的情况. 由雾状引理，点E与F都是g的非游荡点. 同理，对 $\forall k \in \mathbf{Z}$, $g^k(E)$, $g^k(F)$ 也都是g的非游荡点. 也就是说，g的非游荡点集 $\Omega(g)$ 冲出了 $\Omega(f)$ 的邻域U_Λ，发生了"Ω爆炸"现象.

由此看来，要得到Ω稳定性，必需对公理A微分同胚f再加条件.

定义 设 $\Lambda_i(i = 1, \cdots, k)$ 是微分同胚f的一组两两不交的紧不变集，称其中Λ_i与Λ_j有关系"$\Lambda_i \prec \Lambda_j$"，如果

$$(W^s(\Lambda_i) \backslash \Lambda_i) \cap (W^u(\Lambda_j) \backslash \Lambda_j) \neq \emptyset.$$

若在 $\Lambda_i(i = 1, \cdots, k)$ 之中不存在两两不同的 $\Lambda_{i_1}, \cdots, \Lambda_{i_r}(r \geq$

1)，使得

$$\Lambda_{i_1} \prec \Lambda_{i_2} \prec \cdots \prec \Lambda_{i_r} \prec \Lambda_{i_1}$$

成立，则称 $\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$（对关系"$\prec$"）**无环**。

显然例1中 f 的紧、不变集 A,B,C,D,P,Q 对关系"$\prec$"不是无环的，因为有

$$Q \prec P \prec Q.$$

例2 M是二维球面，$f: M \to M$ 如图8.2所示。 A,B,C,D,P,Q 是 f 的一组紧不变集。 它们之间对于"$\prec$"的全部关系如下：

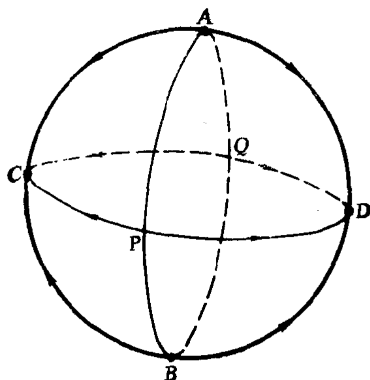


图 8.2

$$C \prec \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \prec \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}; \qquad D \prec \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \prec \begin{matrix} A \\ B \end{matrix};$$

$$C \prec \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}; \qquad D \prec \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}.$$

所以，A,B,C,D,P,Q 对关系"$\prec$"是无环的。

命题8.2 设M是紧 Riemann 流形，$f: M \to M$ 是微分同胚，Λ 是 f 的紧不变集，且 $L(f) \subset \Lambda$，又 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$，其中 $\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$ 是互不相交的紧，闭不变集，则

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Lambda_i),$$

且"并"中各集互不相交，其中

$$W^s(\Lambda_i) = \{x \in M \mid d(f^n(x), \Lambda_i) \to 0,\ 当\ n \to +\infty\};$$

$$W^u(\Lambda_i) = \{x \in M \mid d(f^{-n}(x), \Lambda_i) \to 0, 当\ n \to +\infty\}.$$

证明 命题 6.8 是此命题的特殊情况，但是命题 6.8 的证明这里可以通过，所以不再重复. ▌

注 1：由定义，显然有 $\Lambda_i \subset W^s(\Lambda_i)$, $\Lambda_i \subset W^u(\Lambda_i)$, 对 $\forall i = 1, \cdots, k$. 根据命题 8.2，立刻得到：当 $i \neq j$ 时，

$$W^s(\Lambda_i) \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad W^u(\Lambda_i) \cap \Lambda_j = \emptyset.$$

从而，$\Lambda_i (i=1, \cdots, k)$ 无环的条件也可以分别对 $r = 1$ 与 $r > 1$ 叙述为以下两个条件：

(1) 对 $\forall \Lambda_i$, $i = 1, \cdots, k$,

$$W^s(\Lambda_i) \cap W^u(\Lambda_i) = \Lambda_i.$$

(2) 不存在两两不同的 $i_1, \cdots, i_r (r > 1)$，使对 $\forall j = 1, \cdots, r$,

$$W^s(\Lambda_{i_j}) \cap W^u(\Lambda_{i_{j+1}}) \neq \emptyset,$$

其中 $i_{r+1} = i_1$.

注 2：如果 f 的一组两两不交的紧不变集 $\Lambda_i (i = 1, \cdots, k)$ 对"$\prec$"无环，我们考虑一切两端不能再继续的排列：

$$\not\prec \Lambda_{i_1} \prec \Lambda_{i_2} \prec \cdots \prec \Lambda_{i_j} \not\prec,$$

此种排列的种类有限；每一列中最多有 k 个，因为否则与无环矛盾.

若 Λ_i 是某一列中最前一个，则

$$W^u(\Lambda_i) \backslash \Lambda_i = \emptyset \quad 即 \quad W^u(\Lambda_i) = \Lambda_i.$$

因为否则，由命题 8.2 与无环性，存在 $k \neq i$ 使得

$$[W^u(\Lambda_i) \backslash \Lambda_i] \cap W^s(\Lambda_k) \neq \emptyset.$$

因为 $W^u(\Lambda_i) \cap \Lambda_k = \emptyset$，所以

$$[W^u(\Lambda_i)\backslash\Lambda_i]\cap[W^s(\Lambda_k)\backslash\Lambda_k]\neq\emptyset,$$

即有

$$\Lambda_k\prec\Lambda_i,$$

这与 Λ_i 是最前一个矛盾.

同理,若 Λ_j 是某一列中最后一个,则

$$W^s(\Lambda_j)\backslash\Lambda_j=\emptyset \quad 即 \quad W^s(\Lambda_j)=\Lambda_j.$$

取每一列中最前一个组成第一组,记其并集为 $\bar{\Lambda}_1$;

取每列第二个且其不在后面再出现者组成第二组,记其并集为 $\bar{\Lambda}_2$;

如此继续,得到 $\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$ 的一个再组合 $\bar{\Lambda}_1,\bar{\Lambda}_2,\cdots,\bar{\Lambda}_l$ $(l\leqslant k)$. 显然 $\bar{\Lambda}_j(j=1,\cdots,l)$ 亦是互不相交的紧不变集,且有全序

$$\bar{\Lambda}_1\prec\bar{\Lambda}_2\prec\cdots\prec\bar{\Lambda}_l.$$

对于例 2 中的 $\Lambda_i(i=1,\cdots,6)$ 可以按以上方法再组合为 $C\cup D$, $P\cup Q$ 与 $A\cup B$, 有全序

$$(C\cup D)\prec(P\cup Q)\prec(A\cup B).$$

定义 设 f 为公理A微分同胚,称 f 满足**无环条件**(或说 f 有**无环性**),如果 f 的基集 $\Omega_i(i=1,\cdots,r)$ 对关系"$\prec$"无环.

引理 设 f 是公理A微分同胚,

$$\Omega(f)=\Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_k,$$

其中 $\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$ 是互不相交的紧不变集,有序

$$\Lambda_1\prec\Lambda_2\prec\cdots\prec\Lambda_k,$$

则对 $\forall i$, $i=1,\cdots,k$,有以下诸结论:

(a) $K_i\equiv\bigcup_{j\leqslant i}W^u(\Lambda_j)$ 是 f 的闭不变集;

(b) $\bigcup_{j\leqslant i}W^s(\Lambda_j)$ 是 K_i 的开邻域;

(c) 存在K_i的紧邻域$Q_i\subset\bigcup_{j\leqslant i}W^s(\Lambda_j)$, 使 $K_i=\bigcap_{n\geqslant0}f^n(Q_i)$;

(d) 存在 K_i 的紧邻域 $V_i \subset \mathrm{int} Q_i$，使 $f(V_i) \subset \mathrm{int} V_i$；

(e) 记 $M_0 = \varnothing$，$M_i = \bigcup_{j \leqslant i} V_j$ $(i=1,\cdots,k)$ $(M_k = M!)$，有

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) = \Lambda_i.$$

证明 (a) 显然 K_i 是 f 的不变集．为证 K_i 是闭集，我们来证

$$\overline{K}_i \subset K_i = \bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j).$$

设 n 是使 $\overline{K}_i \cap W^u(\Lambda_n) \neq \varnothing$ 的最大序号，只须证明 $n \ngtr i$．若不然，即存在点 $p \in \overline{K}_i \cap W^u(\Lambda_n)$，且 $n > i$．因为 $\overline{K}_i$ 也是 f 的不变集，于是 p 的 α 极限集 $\alpha_p \subset \overline{K}_i \cap \Lambda_n$，所以存在点 $x \in \overline{K}_i \cap \Lambda_n$．取 Λ_n 的充分小的邻域 U（与 $\Lambda_s(s \neq n)$ 的邻域 U_s 皆不交），存在序列 $x_j(j=1,2,\cdots)$，$x_j \in K_i \cap U$，$x_j \to x$ 当 $j \to +\infty$．因为 $x_j \in K_i$，所以 x_j 的 α 极限集 $\subset \bigcup_{j \leqslant i} \Lambda_j$．而 $n > i$，所以对每一 j，存在最小正整数 N_j 使 $f^{-N_j}(x_j) \notin U$．设 q 是 $\{f^{-N_j}(x_j)\} \subset K_i$ 的极限点，当然 $q \in \overline{K}_i$．因为 U 是开集，所以 $q \notin U$．再由 N_j 的取法知，对 $\forall m > 0$，点集 $\{f^{m-N_j}(x_j)\} \subset U$，所以，$f^m(q) \in \overline{U}$．从而 $q \in W^s(\Lambda_n)$．总之，点 $q \in W^s(\Lambda_n) \setminus \Lambda_n$．

另一方面，由命题 8.2 知，存在 j 使 $q \in W^u(\Lambda_j)$．因 $\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$ 有序，所以 $j > n$．又上面已证 $q \in \overline{K}_i$，总起来，有

$$q \in \overline{K}_i \cap W^u(\Lambda_j),$$

其中 $j > n$．这与 n 是 $\overline{K}_i \cap W^u(\Lambda_n) \neq \varnothing$ 的最大序号矛盾．(a) 得证．

(b) 考虑微分同胚 f^{-1}．有

$$\Omega(f^{-1}) = \Omega(f).$$

$\Lambda_i(i=1,\cdots,k)$ 也是 f^{-1} 的闭不变集，且

$$\Omega(f^{-1}) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k.$$

但对每一 Λ_i，相应于 f^{-1} 的 $W^s(\Lambda_i)$ 与 $W^u(\Lambda_i)$ 正是相应于 f 的 $W^u(\Lambda_i)$ 与 $W^s(\Lambda_i)$；又 $\Lambda_i(i = 1, \cdots, n)$ 对 f^{-1} 的序与对 f 的序相反。对微分同胚 f^{-1} 用结论(a)就得到 $\bigcup\limits_{j \geq i+1} W^s(\Lambda_j)$ 是闭集。由命题 8.2，$\bigcup\limits_{j \leq i} W^s(\Lambda_j)$ 是开集。

由 Λ_i 的序与命题 8.2 可得 $K_i \subset \bigcup\limits_{j \leq i} W^s(\Lambda_j)$。(b)得证。

(c) 设 $Q_i \subset \bigcup\limits_{j \leq i} W^s(\Lambda_j)$ 为 K_i 的任一个紧邻域（即 $K_i \subset \mathrm{int} Q_i$）。显然，$K_i \subset \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(Q_i)$。为证反的包含关系，考虑 $\forall x \in \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(Q_i)$，有 $f^{-n}(x) \in Q_i$ $(n = 0, 1, \cdots)$。因为当 $m > i$ 时 $Q_i \cap \Lambda_m = \varnothing$，由命题 8.2，必有 $n \leqslant i$ 使 $x \in W^u(\Lambda_n)$，即 $x \in K_i$。

总之，$K_i = \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(Q_i)$。(c) 得证。

(d) 对 $\forall r \in \mathbf{Z}^+$，令

$$A_r = Q_i \cap f(Q_i) \cap \cdots \cap f^r(Q_i).$$

因 $K_i \subset \mathrm{int} Q_i$，所以 $K_i \subset \mathrm{int} A_r$。又由(c)知 $\lim\limits_{r \to \infty} A_r = K_i$。

取 $U = f^{-1}(Q_i) \cap Q_i$，由 $K_i \subset \mathrm{int} Q_i$ 得 $K_i \subset \mathrm{int}\, U$，即 U 是 K_i 的紧邻域。因为 $M \setminus \mathrm{int}\, U$ 紧，所以存在 $r_0 \in \mathbf{Z}^+$ 使 $A_{r_0} \subset \mathrm{int}\, U$。从而

$$f(A_{r_0}) \subset f(U) \subset Q_i.$$

进而由 A_{r_0} 定义得知 $f(A_{r_0}) \subset A_{r_0}$。由此关系式得到

$$f^n(A_{r_0}) = \bigcap_{j=0}^{n} f^j(A_{r_0}) \subset \bigcap_{j=0}^{n} f^j(Q_i) = A_n,$$

所以存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使

$$f^n(A_{r_0})\subset \text{int } A_{r_0}.$$

总之，$\exists r_0\in \mathbf{Z}^+$ 使 A_{r_0} 有以下性质(1),(2),(3):

(1) $K_i\subset \text{int } A_{r_0}\subset A_{r_0}\subset \text{int } Q_i$;

(2) $f(A_{r_0})\subset A_{r_0}$;

(3) $f^n(A_{r_0})\subset \text{int } A_{r_0}$，对某个 $n\in \mathbf{Z}^+$.

如果 $n=1$,则取 A_{r_0} 为所求之 V_i 即可.

如果 $n>1$，由性质(1)与(3),可选紧集 ω 使满足:

$$A_{r_0}\subset \text{int}\omega\subset\omega\subset f^{-n}(\text{int}A_{r_0})\cap \text{int}Q_i.$$

从而有

$$f^n(\omega)\subset \text{int } A_{r_0} \quad 与 \quad \omega\subset \text{int}Q_i.$$

令 $E=A_{r_0}\cup[f^{n-1}(\omega)\cap\omega]$，检验 E 有以下性质(1′),(2′),(3′):

(1′) $K_i\subset \text{int } E\subset E\subset \text{int } Q_i$;

(2′) $f(E)\subset E$;

(3′) $f^{n-1}(E)\subset \text{int } E$.

首先,由(1)知 $K_i\subset \text{int } A_{r_0}$,由 E 的定义知 $A_{r_0}\subset E$,所以 $K_i\subset \text{int } E$. 又由(1)知 $A_{r_0}\subset \text{int } Q_i$，再由 ω 的取法 $\omega < \text{int } Q_i$ 得到

$$E=A_{r_0}\cup[f^{n-1}(\omega)\cap\omega]\subset \text{int } Q_i.$$

总之(1′)成立.

其次,由 E 的定义有

$$f(E)=f(A_{r_0})\cup f[f^{n-1}(\omega)\cap\omega]\subset f(A_{r_0})\cup f^n(\omega).$$

由(2)与 ω 的性质 $f^n(\omega)\subset \text{int}A_{r_0}$，立刻有

$$f(E)\subset A_{r_0}.$$

注意 $A_{r_0}\subset E$,所以性质(2′)成立.

最后,由 ω 的性质有

$$f^{n-1}(A_{r_0})\subset f^{n-1}(\text{int}\omega)=\text{int}f^{n-1}(\omega).$$

由(2)与 ω 的性质有

$$f^{n-1}(A_{r_0})\subset A_{r_0}\subset \text{int}\omega,$$

合起来,得到

$$f^{n-1}(A_{r_0})\subset\text{int}[f^{n-1}(\omega)\cap\omega].$$

应用ω的性质有

$$f^{n-1}[f^{n-1}(\omega)\cap\omega]\subset f^{n-2}(f^{n}(\omega))\subset f^{n-2}(\text{int}A_{r_0}).$$

再由(2)得到：

$$f^{n-1}[f^{n-1}(\omega)\cap\omega]\subset\text{int }A_{r_0}.$$

综合以上结果，由E的定义就得到

$$f^{n-1}(E)\subset\text{int }E.$$

即性质(3')成立。

若 $n-1=1$，则取E为所求之V_i即可。

若 $n-1>1$，则以E代替上面讨论中的A_{r_0}，类似地得到E_1。如此递推使n每次减1，有限步之后就得到紧集V_i满足：

$$K_i\subset\text{int}V_i\subset V_i\subset\text{int }Q_i \quad 与 \quad f(V_i)\subset\text{int }V_i.$$

(d)得证。

(e) 由以上诸结论得到以下关系：

$$\bigcup_{j\le i}W^u(\Lambda_j)\subset\text{int}M_i\subset M_i\subset\bigcup_{j\le i}W^s(\Lambda_j).$$

于是，由命题 8.2 立刻得到：

$$M_i\cap\Big(\bigcup_{j\ge i+1}\Lambda_j\Big)=\varnothing$$

与

$$(M\backslash\text{int }M_{i-1})\cap\Big(\bigcup_{j\le i-1}\Lambda_j\Big)=\varnothing.$$

若 $x\in\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}f^n(M_i\backslash\text{int}M_{i-1})$，则

$$f^n(x)\subset M_i\backslash\text{int }M_{i-1}$$

对 $\forall n\in\mathbf{Z}$ 成立。于是，当 $n\to+\infty$ 或 $n\to-\infty$ 时，$f^n(x)\to\Lambda_i$，即

$$x\in W^s(\Lambda_i)\cap W^u(\Lambda_i)$$

因为 $\Lambda_i \not\prec \Lambda_i$，所以

$$W^s(\Lambda_i)\cap W^u(\Lambda_i)=\Lambda_i.$$

也就是有 $x\in\Lambda_i$，即

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i\backslash \operatorname{int} M_{i-1})\subset\Lambda_i.$$

反过来的包含关系"$\supset$"显然成立，因为对 $\forall n\in\boldsymbol{Z}$，

$$f^n(M_i\backslash \operatorname{int} M_{i-1})\supset\Lambda_i.$$

(e)得证。▌

定义 如果 $M_i(i=0,1,\cdots,k)$ 是流形M的一族带光滑边子流形，满足

(1) $M_0=\varnothing\subset M_1\subset\cdots\subset M_{k-1}\subset M_k=M$；

(2) $f(M_i)\subset\operatorname{int} M_i\ (i=1,\cdots,k)$，

则称 $\{M_i,(i=0,1,\cdots,k)\}$ 是微分同胚 f 的一个**过滤子**。

例 引理(e)中定义的$\{M_i\}$是 f 的一个过滤子。

定理 8.3（Ω 稳定性） 设 $f\in\operatorname{Diff}^r(M)$ 是公理 A 微分同胚，又 f 满足无环条件，则 f 是Ω 稳定的。

证明 因 f 无环，所以其基集 $\Omega_i(i=1,\cdots,s)$ 可以组合．为 $\Omega_j^f(j=1,\cdots,k)$ 排成全序，即有

$$\Omega(f)=\Omega_1^f\cup\cdots\cup\Omega_k^f$$

与

$$\Omega_1^f\prec\Omega_2^f\prec\cdots\prec\Omega_k^f.$$

因 Ω_i^f 满足引理中 Λ_i 的一切条件，所以取 Ω_i^f 为 Λ_i 有引理的一切结论。

对 f 与 $\Omega_i^f(i=1,\cdots,k)$ 应用定理 8.1，则存在 Ω_i^f 的小邻域 U_i，f 的邻域 $\mathscr{N}$，使当 $g\in\mathscr{N}$ 时，有同胚 $\varphi_i^g:\Omega_i^f\to\Lambda_i^g$，$\Lambda_i^g$ 是 g 的紧双曲不变集，且在 U_i 中最大。

以 $\Omega(g)$ 表示 g 的非游荡点集，不难看出 $\bigcup_{i=1}^{k}\Lambda_i^g\subset\Omega(g)$．分解 $\Omega(g)$ 为 k 部分，第 i 部分

$$\Omega_i^g=\Omega(g)\cap(M_i\backslash \operatorname{int} M_{i-1})\ (i=1,\cdots,k).$$

如果证得 Ω_i^g 是 g 的不变集且 $\Omega_i^g \subset U_i$ $(i=1,\cdots,k)$，则由 Λ_i^g 在 U_i 中最大就得到 $\Omega_i^g \subset \Lambda_i^g$，从而

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i^g = \Omega(g).$$

于是定理得证。

因为 U_i 是 Ω_i^f 的邻域，所以 $M\setminus U_i$ 是紧集。由引理(e)

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) = \Omega_i^f,$$

所以存在 $N \in \boldsymbol{Z}^+$ 使

$$\bigcap_{n=-N}^{N} f^n(M_i \setminus \mathrm{int}\, M_{i-1}) \subset U_i \quad (i=1,\cdots,k).$$

又由引理知

$$f(M_i) \subset \mathrm{int} M_i \quad (i=1,\cdots,k),$$

U_i，$\mathrm{int}\, M_i$ 开，故存在 f 的充分小邻域 $\mathscr{N} \subset \bar{\mathscr{N}}$，使对 $\forall g \in \mathscr{N}$，$i=1,\cdots,k$，有

$$g(M_i) \subset \mathrm{int}\, M_i \tag{1}$$

与

$$\bigcap_{n=-N}^{N} g^n(M_i \setminus \mathrm{int}\, M_{i-1}) \subset U_i. \tag{2}$$

由(1)式知 $\{M_i\ (i=0,\cdots,k)\}$ 也是 g 的一个过滤子。考虑

$$\forall x \in \Omega_i^g = \Omega(g) \cap (M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}).$$

显然，对 $\forall n \in \boldsymbol{Z}$，$g^n(x) \in \Omega(g)$。由非游荡点定义与$\{M_i\}$是 g 的过滤子得知，对 $\forall n \in \boldsymbol{Z}$，

$$g^n(x) \in M_i \setminus \mathrm{int}\, M_{i-1},$$

即 $g^n(x) \in \Omega_i^g$，Ω_i^g 是 g 的不变集。于是

$$\Omega_i^g \subset \bigcap_{n=-N}^{N} g^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \quad (i=1,\cdots,k).$$

由(2)式知

$$\Omega_i^g \subset U_i \quad (i=1,\cdots,k).$$

这就证明了 f 的 Ω 稳定性. ▌

参考文献

[1] В. А. ПЛИСС., НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ, «НАУКА» МОСКВА. 1964.

[2] J. Palis, J. W. de Melo, Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag New York Inc. 1982.

[3] J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Study in Mathematics, Princeton, 1973.

[4] M. C. Irwin, Smooth Dynamical Systems, Academic Press, 1980.

[5] M. Shub, Stabilité Globale des Systemes Dynamiques, Astérisque, 1978.

[6] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag New York Inc. 1982.

[7] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Second Edition, Birkhäuser Boston, 1982.

[8] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Deffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics; 470, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1975.

[9] V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag New York Inc. 1983.

[10] Z. Nitecki, Differentiable Dynamics, M. I. T. Press, 1971.

[12] 张景中，杨路，«关于 Smale 马蹄及其Ω稳定性»，«数学进展»，10卷2期，1981.

[13] 张锦炎，«常微分方程几何理论与分支问题»，第二版，北京大学出版社，1985.

[General Information]
书名=微分动力系统导引
作者=张锦炎　钱敏
页数=211
SS号=10236523
DX号=
出版日期=1991年04月第1版
出版社=北京大学出版社